Nombres complexes

BCPST 1 — 2022/2023

Exercice 1

Mettre sous forme algébrique les nombres complexes suivants.

1. $(3+\mathrm{i})(4-5\mathrm{i})+7-2\mathrm{i}$
2. $\dfrac{-5+3\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}+\dfrac{3+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$
3. $\dfrac{3+\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}\sqrt{2}}+\dfrac{3-5\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}}$
4. $(1+\mathrm{i})^3+(1-\mathrm{i})^3$

Exercice 2

Calculer la partie réelle et la partie imaginaire de

$$\frac{3}{3-\mathrm{i}} \quad (3-\mathrm{i})^2+(1+\mathrm{i})^4 \quad \frac{3+2\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}}$$

Exercice 3

Écrire sous forme algébrique

$$\frac{1+2\mathrm{i}}{3-4\mathrm{i}} \quad \frac{1}{(1+2\mathrm{i})^2} \quad \frac{(1+\mathrm{i})^3}{(1-\mathrm{i})^2}$$

$$\frac{1+\mathrm{i}}{3-\mathrm{i}}+\frac{1-\mathrm{i}}{3+\mathrm{i}} \quad \frac{1}{1+\frac{2}{\mathrm{i}}} \quad (1+(1+(1+2\mathrm{i})^2)^{-1})$$

Exercice 4

Déterminer les complexes z qui vérifiant $z=\mathrm{Re}(z)+\mathrm{Im}(z)$.

Exercice 5 — *Questions de cours*

1. Donnez toutes les formules concernant le conjugué.
2. Donnez toutes les inégalités du cours.
3. Exponentielle complexe.
4. Donner la forme trigonométrique de $1+\mathrm{i}$, $1-\mathrm{i}$, $-1-\mathrm{i}$.
5. Formule d'Euler : linéariser $\cos^5 x$.
6. Formules de Moivre : exprimer $\cos 5x \sin x$ en fonction de $\sin x$ et $\cos x$.
7. Redémontrer que $\sin(a-b)=\sin a \ \cos b-\cos a \ \sin b$.
8. Démontrer que $\tan a-\tan b=\dfrac{\sin(a-b)}{\cos a\cos b}$.
9. Écrire $2\cos x+\sin x$ sous la forme $A\cos(x+\phi)$.
10. Résoudre $X^2+X+1=0$.
11. Résoudre $X^2=-4i$ de deux manières différentes.

Exercice 6 — *Vrai ou faux ?*

1. Deux complexes dont le produit et la somme sont réels, sont des réels ;
2. pour tout complexe z, $|z|^2=z^2$;
3. pour tous complexes a et b, $a+\mathrm{i}b=0 \implies a=b=0$;
4. $\forall z\in\mathbb{C},\quad \mathrm{e}^{iz}=-1 \implies z=i\pi$;

Module et argument

Exercice 7

Mettre sous forme trigonométrique les nombres complexes suivants.

$$\sqrt{7}-\mathrm{i}\sqrt{7} \qquad 5+5\mathrm{i}\sqrt{3} \qquad -\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{\mathrm{i}}{4}$$

Exercice 8

Exprimer sous forme algébrique les nombres complexes de modules r et d'argument t

$$r=\sqrt{2}, t=\frac{\pi}{4} \qquad r=2, t=\frac{-\pi}{3} \qquad r=2, t=\frac{2\pi}{3}$$

$$r=3, t=\frac{3\pi}{2} \qquad r=1, t=k\pi \qquad r=1, t=\frac{k\pi}{2}$$

Exercice 9

Déterminer le module et l'argument de

$$z_1=\frac{\sqrt{6}+\mathrm{i}\sqrt{2}}{2}, \qquad z_2=1+i, \quad z=\frac{z_1}{z_2}$$

En déduire les valeurs de $\cos\left(\dfrac{7\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{7\pi}{12}\right)$.

Exercice 10

1. Calculer $\left(1+\mathrm{i}\sqrt{3}\right)^{2023}$.
2. Résoudre $z^4=8(1-\mathrm{i}\sqrt{3})$.

Exercice 11

Soit $u=\sqrt{2-\sqrt{2}}-\mathrm{i}\sqrt{2+\sqrt{2}}$.

1. Calculer u^2 puis u^4.
2. En déduire module et argument de u.
3. Calculer $\cos\left(\dfrac{3\pi}{8}\right)$.

Exercice 12

Soit $n\in\mathbb{N}$ et $\theta\in\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$. Simplifier les expressions

$$(1+\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)^n, \qquad \left(\frac{1+\mathrm{i}\tan\theta}{1-\mathrm{i}\tan\theta}\right)^n$$

Exercice 13

Soit $\theta\in\mathbb{R}\setminus 2\pi\mathbb{Z}$ et $z=\dfrac{1+\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta}{1-\cos\theta-\mathrm{i}\sin\theta}$.
Déterminer $\mathrm{Re}(z)$, $\mathrm{Im}(z)$, $|z|$ et $\arg(z)$.

Exercice 14
Soit $(\alpha, \beta) \in [0\,;\,2\pi[^2$. Déterminer le module et l'argument des nombres complexes suivants :

$$z_1 = 1 + e^{i\alpha}; \qquad z_2 = \frac{1}{1+e^{i\alpha}}; \qquad z_3 = e^{i\alpha e^{i\beta}}.$$

Exercice 15
Soit $n \in \mathbb{N}$. Simplifier l'expression $(1+i)^n + (1-i)^n$.

Exercice 16
Soit u et v deux complexes quelconques. Montrer que

$$|u| + |v| \leqslant |u+v| + |u-v|$$
$$|u+v|^2 + |u-v|^2 = 2\left(|u|^2 + |v|^2\right)$$

Illustrer ces inégalités sur un schéma.

Exercice 17
Soient V et V' des vecteurs d'affixes z et z', tels que $z\overline{z'} = z'\overline{z}$. Que peut-on dire sur V et V' ?

Exercice 18
Déterminer les complexes z telles que z, $z-1$ et $1/z$ aient le même module.

Équations dans $\mathbb{C}$

Exercice 19
Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{C}$:
1. $X^2 = 4$;
2. $X^2 = -9$;
3. $X^2 + 2X + 10 = 0$;
4. $X^4 + X^2 + 1 = 0$.

Exercice 20
Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{C}$:
1. $z^2 - 2^{\theta+1}\cos\theta\, z + 2^{2\theta} = 0$;
2. $z^2 - \dfrac{4}{\sin\theta} z + \dfrac{13}{\sin^2\theta} - 9 = 0$, $\theta \in]0, \pi[$;
3. $2z^2(1-\cos 2\theta) - 2z\sin 2\theta + 1 = 0$, $\theta \in]0, \pi[$;
4. $z^2 - 2iz - 1 + 2i = 0$;
5. $iz^2 + iz + 1 + i = 0$;
6. $z^2 - 2e^{i\theta} z + 2i\sin\theta e^{i\theta} = 0$ (on écrira les racines sous forme trigonométriques).

Exercice 21
1. Pour $t \in \mathbb{R}$, résoudre l'équation d'inconnue complexe $z : z^2 + 2tz + 1 = 0 \;\; (E_t)$
2. Quel est l'ensemble Ω des points M_z d'affixe z, où z est solution de (E_t), lorsque t décrit $\mathbb{R}$?

Exercice 22
1. Chercher les solutions complexes α de l'équation $\alpha^2 = 5 - 12i$.
2. Résoudre l'équation $z^2 - \sqrt{5}z - 3i = 0$.
   Indication : *On pourra mettre d'abord cette équation sous forme canonique.*

Exercice 23
Résoudre dans $\mathbb{C}$ le système

$$\begin{cases} z_1 + z_2 = 1 + i \\ z_1 z_2 = 2 - i \end{cases}$$

Exercice 24
Résoudre dans $\mathbb{C}$ $\;z^3 = 4\sqrt{2}(1+i)$.

Exercice 25
Résoudre dans $\mathbb{C}$ $\;|z+1| = |z| + 1$.

Exercice 26
Pour $a \in \mathbb{R}$, résoudre le système d'équations d'inconnues réelles x et y :

$$\begin{cases} \cos a + \cos(a+x) + \cos(a+y) = 0 \\ \sin a + \sin(a+x) + \sin(a+y) = 0 \end{cases}$$

Exercice 27
Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations
1. $e^z = -4$;
2. $e^z = 2i$;
3. $e^z = 1 + i$;
4. $e^{2z} = \sqrt{3} - i$;
5. $e^{iz} = \dfrac{\sqrt{2}-2}{2}(1+i)$;
6. $e^{(1+i)z} = i$.

Exercice 28
Soit $a \in \mathbb{R}$ et $z \in \mathbb{C}$.
1. Résoudre $z^2 + 2z\cos a + 1 = 0$.
2. Interpréter, pour z réel, $z^2 + 2z\cos a + 1$ comme un module.
3. Résoudre $z^{2n} - 2z^n\cos(na) + 1 = 0$.

Complexes et trigonométrie

Exercice 29
Pour quelles valeurs de n le complexe $\left(\dfrac{(1-i\sqrt{3})^5}{(1-i)^3}\right)^n$ est un réel positif ?

Exercice 30
Calculer $\cos 4x$, $\sin 4x$, $\sin x\cos 3x$, $\cos 2x \sin 2x$ en fonction de $\sin x$, de $\cos x$ et de leurs puissances.

Exercice 31
1. Calculer $\cos(5x)$ et $\sin(5x)$ en fonction respectivement de $\cos x$ et $\sin x$.

2. En déduire une équation polynômiale de degré 5 dont $cos(\pi/10)$ est solution.
3. Résoudre cette équation, et donner une expression de $\cos(\pi/10)$ utilisant des racines carrées.

Exercice 32
Linéariser les produits $\cos^2 x \sin x$, $\cos^3 x \sin^2 x$ et $\cos^3 x \sin^4 x$.

Exercice 33
Linéariser $\cos^4 t$ et $\cos^4 t \sin^4 t$ et $\sin^6 t$.

Divers

Exercice 34
On pose $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$.

1. Calculer j^3, $1 + j + j^2$.
2. Simplifier les expressions
$$(1+j)^5, \quad \frac{1}{(1+j)^4}, \quad \frac{1}{1-j^2}$$
3. Montrer que si α et β sont deux réels, alors
$$\alpha + j\beta = 0 \quad \Longrightarrow \quad \alpha = \beta = 0$$
En déduire une condition nécessaire et suffisante sur $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ pour que l'on ait $a + bj + cj^2 = 0$.

Exercice 35
Soit $\theta \in \mathbb{R}$ fixé. On considère $z \in \mathbb{C}$ tel que
$$z + \frac{1}{z} = 2\cos\theta$$
Que vaut $z^n + \dfrac{1}{z^n}$?
Indication : *On pourra montrer que* $|z| = 1$.

Exercice 36
n et p sont chacun la somme des carrés de deux entiers. Montrer que c'est aussi le cas de leur produit np.
Indication : *n et p peuvent être interpréter à l'aide des modules de deux complexes.*

Exercice 37
Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^7 - 1 = 0$. En déduire que
$$\cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{6\pi}{7} + \frac{1}{2} = 0$$

Exercice 38
Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations :

1. $z^2 - \left(5 + 4i\sqrt{3}\right)z + 9 = 0$
2. $\left(\dfrac{z+i}{z-i}\right)^3 + \left(\dfrac{z+i}{z-i}\right)^2 + \left(\dfrac{z+i}{z-i}\right) + 1 = 0$
3. $z^6 - (1-i)z^3 - i = 0$

Exercice 39
Soit $a = e^{i\alpha}$ et $b = e^{i\beta}$. Simplifier $\dfrac{a+b}{a-b}$ et $\dfrac{a+b}{1-ab}$.

Exercice 40
Résoudre $4z^2 + 8|z|^2 - 3 = 0$.

Exercice 41
Résoudre $27(z-i)^6 - (z+1)^6 = 0$. Donner des formes cartésiennes des solutions.