Nombres complexes

bcpst 1 — 2022/2023

I — Définition de $\mathbb{C}$ – Écriture algébrique

Définition I.1 — Nombres complexes
*On appelle **ensemble des nombres complexes** et on note $\mathbb{C}$ l'ensemble $\mathbb{R}^2$.*
Chaque élément $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ définit un nombre complexe noté $x + \mathrm{i}y$.
L'ensemble $\mathbb{C}$ est muni des deux opérations

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \ \ \forall (x', y') \in \mathbb{R}^2,$$

addition $$(x + \mathrm{i}y) + (x' + \mathrm{i}y') \overset{\text{déf.}}{=} (x + x') + i(y + y')$$

multiplication $$(x + \mathrm{i}y) \times (x' + \mathrm{i}y') \overset{\text{déf.}}{=} (xx' - yy') + \mathrm{i}(xy' + x'y)$$

Pour retenir facilement cette définition, il suffit de calculer « comme dans $\mathbb{R}$ » en adoptant la convention $\mathrm{i} \times \mathrm{i} = -1$.

Définition I.2 — Partie réelle, partie imaginaire
Soit $z \in \mathbb{C}$. Il existe un unique couple (x, y) de réels tels que $z = x + \mathrm{i}y$.
*Le réel x est la **partie réelle** de z notée $\mathrm{Re}(z)$; le réel y est sa **partie imaginaire**, notée $\mathrm{Im}(z)$.*
On identifie le sous-ensemble $\{z \in \mathbb{C}, \ \ \mathrm{Im}(z) = 0\}$ avec $\mathbb{R}$.
*Si $\mathrm{Re}(z) = 0$, z est un **imaginaire pur**. L'ensemble des imaginaires purs est noté $\mathrm{i}\mathbb{R}$.*

On convient de noter un élément de la forme $x + \mathrm{i}0$ simplement par x et un nombre complexe de la forme $0 + \mathrm{i}y$ simplement par $\mathrm{i}y$.

Proposition I.3

1. *L'addition possède comme élément neutre 0; la multiplication possède comme élément neutre 1 et comme élément absorbant 0.*
2. *L'addition et la multiplication sont commutatives et associatives.*
3. *La multiplication est distributive sur l'addition.*
4. *Soit $z \in \mathbb{C}$: z admet un opposé pour l'addition qui est $(-1) \times z$, simplement noté $-z$.*

Théorème I.4 — Cas d'égalité
Soit $(x, x', y, y') \in \mathbb{R}^4$: $\quad x + \mathrm{i}\,y = x' + \mathrm{i}\,y' \iff x = x' \quad$ *et* $\quad y = y'$

Propriété I.5 — Propriété des parties réelles et imaginaires
Soit $(z, z') \in \mathbb{C}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\mathrm{Re}(z + z') = \mathrm{Re}(z) + \mathrm{Re}(z') \qquad \mathrm{Im}(z + z') = \mathrm{Im}(z) + \mathrm{Im}(z')$$
$$\mathrm{Re}(\lambda z) = \lambda\,\mathrm{Re}(z) \qquad \mathrm{Im}(\lambda z) = \lambda\,\mathrm{Im}(z)$$

Attention ! En général $\mathrm{Re}(zz') \neq \mathrm{Re}(z)\,\mathrm{Re}(z')$ et $\mathrm{Im}(zz') \neq \mathrm{Im}(z)\,\mathrm{Im}(z')$.

Attention ! Il n'y a pas de relation d'ordre sur $\mathbb{C}$ qui prolonge la relation d'ordre de $\mathbb{R}$.

Interprétation géométrique Soit M un point de $\mathbb{R}^2$ de coordonnées (x, y) et $z = x + \mathrm{i}y$. Le nombre complexe z est l'**affixe** du point M et le point M est l'**image** du nombre complexe z.
La somme de deux nombres complexes a pour affixe la somme vectorielle de leurs affixes.

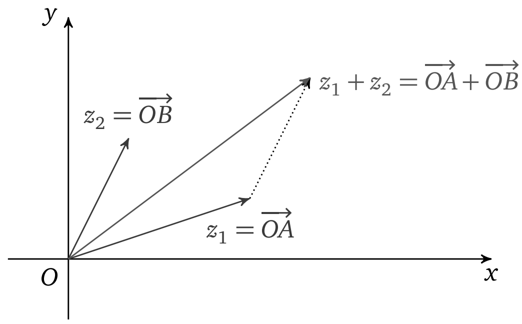

FIGURE 1 — *Addition de nombres complexes et addition vectorielle*

II — CONJUGUÉ

DÉFINITION 2.1 — **Conjugué d'un complexe**
*Soit $z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C}$, avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On appelle **conjugué** de z et on note $\overline{z}$ le complexe*

$$\overline{z} \overset{\text{déf.}}{=} x - iy$$

PROPRIÉTÉ 2.2 — **Conjugaison et opérations**
Soit $(z, z') \in \mathbb{C}^2$

1. $\overline{\overline{z}} = z$
2. $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$
3. $\overline{zz'} = \overline{z}\,\overline{z'}$
4. *Si $n \in \mathbb{N}$,* $\overline{z^n} = \overline{z}^n$

PROPRIÉTÉ 2.3
Soit $z \in \mathbb{C}$: $\mathrm{Re}(z) = \dfrac{z + \overline{z}}{2}$ *et* $\mathrm{Im}(z) = \dfrac{z - \overline{z}}{2i}$.
Ainsi z est réel si et seulement si $z = \overline{z}$ et z est imaginaire pur si et seulement si $z = -\overline{z}$.

PROPRIÉTÉ 2.4 — **Inverse d'un nombre complexe**
Si $z \in \mathbb{C}$, $z = x + \mathrm{i}y$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Si $z \neq 0$, alors z admet pour inverse

$$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{z\overline{z}} = \frac{x}{x^2 + y^2} - \mathrm{i}\frac{y}{x^2 + y^2}$$

PROPRIÉTÉ 2.5
Soit $(z, z') \in \mathbb{C}^2$, avec $z \neq 0$, $\overline{\left(\dfrac{1}{z}\right)} = \dfrac{1}{\overline{z}}$ *et* $\overline{\left(\dfrac{z'}{z}\right)} = \dfrac{\overline{z'}}{\overline{z}}$

III — MODULE

DÉFINITION 3.1 — Module d'un nombre complexe

Soit $z \in \mathbb{C}$, $z = x + iy$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Le nombre $x^2 + y^2$ est un réel positif. Par définition, on note

$$|z| \stackrel{\text{déf.}}{=} \sqrt{x^2 + y^2}$$

*que l'on appelle le **module** du nombre complexe z. On a aussi $|z| \stackrel{\text{déf.}}{=} \sqrt{z\bar{z}}$.*

Le module d'un nombre réel coïncide avec sa valeur absolue.

Interprétation géométrique

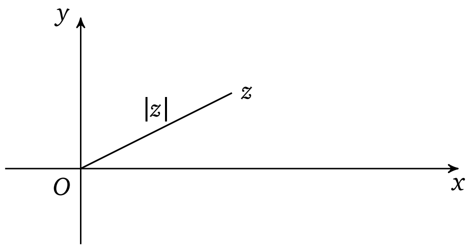

FIGURE 2 — *Le réel $|z|$ est la distance euclidienne entre l'image de z et l'origine.*

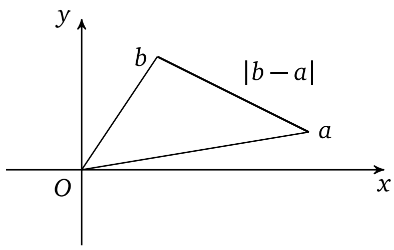

FIGURE 3 — *Si a et b sont deux complexes, $|b - a|$ est la distance entre les images de a et b.*

PROPRIÉTÉ 3.2 — Propriétés du module

Soit $(z, z') \in \mathbb{C}^2$

1. $|z| = 0 \iff z = 0$
2. $|zz'| = |z|\,|z'|$
3. *Si $n \in \mathbb{Z}$,* $\quad |z^n| = |z|^n$
4. $|z| = |\bar{z}|$
5. *Si $z' \neq 0$,* $\quad \left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}$
6. $|\mathrm{Re}(z)| \leqslant |z|$
7. $|\mathrm{Im}(z)| \leqslant |z|$

THÉORÈME 3.3 — Inégalité triangulaire

$$\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2, \qquad |z + z'| \leqslant |z| + |z'|$$

COROLLAIRE 3.4

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$: $\qquad |c - a| \leqslant |b - a| + |c - b|$

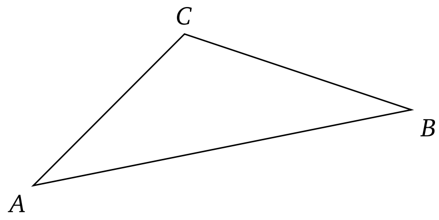

FIGURE 4 — *Interprétation de l'inégalité triangulaire : si on considère trois points A, B et C du plan, alors l'inégalité triangulaire implique que $AB \leqslant AC + CB$. La ligne droite AB est un chemin plus court entre A et B que la ligne brisée ACB.*

IV — Notation $e^{i\theta}$

DÉFINITION 4.1 — **Exponentielle complexe**
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On note $\quad e^{i\alpha} \overset{\text{déf.}}{=} \cos\alpha + i\sin\alpha$

PROPRIÉTÉ 4.2 — **Relation fondamentale**

$$\forall(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2, \qquad e^{i(\alpha+\beta)} = e^{i\alpha}\,e^{i\beta}$$

PROPRIÉTÉ 4.3
Soit $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$

- $\left|e^{i\alpha}\right| = 1$ *(et donc $e^{-i\alpha} \neq 0$)*
- $e^{-i\alpha} = \overline{e^{i\alpha}}$
- $e^{-i\alpha} = \dfrac{1}{e^{i\alpha}}$
- $e^{i(\alpha-\beta)} = \dfrac{e^{i\alpha}}{e^{i\beta}}$
- *Pour $n \in \mathbb{Z}$,* $\quad \left(e^{i\alpha}\right)^n = e^{in\alpha}$

PROPRIÉTÉ 4.4 — **Cas d'égalité pour la forme exponentielle**
Soit $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$

$$e^{i\alpha} = e^{i\beta} \iff \exists k\in\mathbb{Z}, \qquad \alpha = \beta + 2k\pi$$

PROPOSITION 4.5 — **Formules d'Euler**
Soit $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} \qquad\qquad \sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$$

V — Forme exponentielle d'un nombre complexe

Théorème 5.1 — Notation exponentielle
Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Il existe un couple $(\rho, \theta) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ tel que

$$z = \rho e^{i\theta} = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$$

Propriété 5.2 — Cas d'égalité
Soit $(z, z') \in \mathbb{C}^2$, de notations exponentielles $z = \rho e^{i\alpha}$ et $z' = \rho' e^{i\beta}$

$$z = z' \iff \rho = \rho' \quad \text{et} \quad \exists k \in \mathbb{Z},\ \alpha = \beta + 2k\pi$$

Interprétation géométrique Les réels ρ et θ sont les **coordonnées polaires** de l'affixe de z.

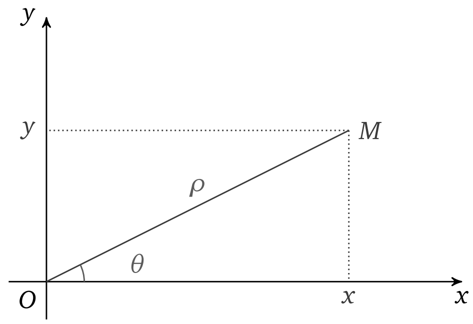

Figure 5 — *Coordonnées polaire et cartésiennes.*

VI — Arguments

Définition 6.1 — Arguments d'un nombre complexe
Soit $z \in \mathbb{C}^*$, $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tels que $z = re^{i\theta}$.
Tout nombre réel θ vérifiant la relation précédente est ***un argument*** *de z.*

Propriété 6.2
Soit $z \in \mathbb{C}$, θ et θ' deux arguments de z. Alors

$$\exists k \in \mathbb{Z}, \qquad \theta' = \theta + 2k\pi$$

Propriété 6.3 — Propriété de l'argument
Soit $(z, z') \in (\mathbb{C}^*)^2$.

$$\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z') \quad [2\pi] \qquad \arg(z^n) = n\arg(z) \quad [2\pi]$$

$$\arg(1/z) = -\arg(z) \quad [2\pi] \qquad \arg(z/z') = \arg(z) - \arg(z') \quad [2\pi]$$

$$\arg(\overline{z}) = -\arg(z) \quad [2\pi]$$

THÉORÈME 7.1 — **Équation $X^2 = a$**

Soit $a \in \mathbb{C}$. L'équation $X^2 = a$ admet deux solutions dans $\mathbb{C}$. Elles sont opposée l'une de l'autre.

En particulier

- *Si $a \in \mathbb{R}_+$ ces deux solutions sont $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$;*
- *Si $a \in \mathbb{R}_-$ ces deux solutions sont $\mathrm{i}\sqrt{|a|}$ et $-\mathrm{i}\sqrt{|a|}$.*

THÉORÈME 7.2 — **Équation du second degré**

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, avec $a \neq 0$. On considère l'équation du second degré d'inconnue X

$$aX^2 + bX + c = 0 \tag{E}$$

*On définit son **discriminant** $\Delta = b^2 - 4ac$. L'équation (E) admet*

- *deux solutions réelles distinctes si $\Delta > 0$:*

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \qquad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

- *une seule solution réelle si $\Delta = 0$:*

$$x_1 = \frac{-b}{2a}$$

- *deux solutions complexes conjuguées si $\Delta > 0$:*

$$x_1 = \frac{-b + \mathrm{i}\sqrt{|\Delta|}}{2a} \qquad x_2 = \frac{-b - \mathrm{i}\sqrt{|\Delta|}}{2a}$$

THÉORÈME 7.3 — **Somme et produit des racines**

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, avec $a \neq 0$. L'équation du second degré

$$aX^2 + bX + c = 0 \tag{E}$$

admet toujours deux solutions x_1 et x_2, éventuellement confondues, éventuellement complexes. On a

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \qquad \text{et} \qquad x_1 x_2 = \frac{c}{a}$$