Dénombrement

bcpst 1 — 2022/2023

I — Ensemble fini et cardinal

Définition I.1 — Ensemble fini, cardinal
On dit qu'un ensemble E est un ***ensemble fini*** *si et seulement si E est vide ou s'il existe un entier non nul n et une bijection de E dans $[\![1 ; n]\!]$.*
Dans ce dernier cas l'entier n est unique : c'est le ***cardinal*** *de E, noté $\operatorname{card} E$ ou encore $\#E$ (parfois $|E|$).*
Par convention $\#\varnothing = 0$.

Une telle bijection s'appelle une énumération de E. C'est *une* façon de compter les éléments de E. L'entier $\# E$ représente le nombre d'éléments de E.

Théorème I.2 — Sous-ensemble d'un ensemble fini
Soit E un ensemble fini et A un sous-ensemble de E. Alors A est un ensemble fini.

Théorème I.3 — Union disjointe (1)
Soit E et F deux ensembles finis disjoints. Alors $E \cup F$ est un ensemble fini et

$$\#(E \cup F) = \# E + \# F$$

Théorème I.4 — Union disjointe (2)
Soit $r \in \mathbb{N}^*$ et $A_1, A_2, \dots, A_r$ r ensembles finis deux à deux disjoints. Alors

$$\#(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_r) = \sum_{k=1}^{r} \# A_k$$

Corollaire I.5 — Complémentaire d'un ensemble
Soit E un ensemble fini et A un sous-ensemble de E alors

$$\# \overline{A} = \# E - \# A$$

Corollaire I.6
Soit E un ensemble fini et A un sous-ensemble de E.

- *$\# A \leqslant \# E$;*
- *$\# A = \# E$ si et seulement si $A = E$.*

PROPRIÉTÉ 1.7

Soit A et B deux ensembles finis.

1) $\#(A \setminus B) = \#A - \#(A \cap B)$;
2) $\#(A \cup B) = \#A + \#B - \#(A \cap B)$;
3) $\#(A \cap B) = \#A + \#B - \#(A \cup B)$;

COROLLAIRE 1.8

Soit E un ensemble à n éléments et $A_1, A_2, \dots, A_r$ une partition de E. Alors

$$\# E = \sum_{k=1}^{r} \# A_k$$

COROLLAIRE 1.9 — **Principe de symétrie ou « des bergers »**

Soit E un ensemble à n éléments et $A_1, A_2, \dots, A_r$ une partition de E. Si $\# A_1 = \# A_2 = \cdots = \# A_r = p$ alors $\# E = r \times p$.

II — DÉNOMBREMENT

THÉORÈME 2.1 — **Cardinal du produit cartésien (1)**

Soit A et B deux ensembles finis. Alors $A \times B$ est un ensemble fini et

$$\#(A \times B) = \# A \times \# B$$

THÉORÈME 2.2 — **Cardinal du produit cartésien (2)**

Soit $E_1, E_2, \dots, E_p$ p ensembles finis de cardinaux respectifs n_1, n_2, ..., n_p.
L'ensemble $E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_p$ est fini, de cardinal $n_1 \times n_2 \times \cdots \times n_p$.

COROLLAIRE 2.3

En particulier $\#(E^p) = (\# E)^p$.

On parle de **p–listes** d'éléments de E ou encore de **p–uplets** d'éléments de E ou simplement de **listes de p éléments de E**.
Ces théorèmes formalisent les raisonnements « avec choix successifs » : E_1 est l'ensemble des choix possibles pour la première lettre, E_2 pour la seconde, etc.

Un **arrangement** de p éléments de E est une liste de p éléments de E ne contenant pas deux fois le même élément (« sans répétition »).

DÉFINITION 2.4 — **Arrangements**
Soit E un ensemble de cardinal n et p un entier naturel. On appelle ***arrangement de p éléments de E*** *un p–uplet $(x_1, x_2, \dots, x_p) \in E^p$ tel que*

$$\forall (i,j) \in [\![1 ; p]\!]^2, \quad i \neq j, \qquad x_i \neq x_j$$

THÉORÈME 2.5 — **Nombre d'arrangements**
Le nombre d'arrangements de p éléments d'un ensemble E de cardinal n ne dépend que de n et de p.

1) *Si $p \leqslant n$, il y a*

$$n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times (n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}$$

arrangements de cette sorte ;

2) *si $p > n$ il n'y a pas d'arrangements possibles de cette sorte.*

DÉFINITION 2.6 — **Permutations**
On appelle ***permutations*** *d'un ensemble E à n éléments les arrangements de n éléments de E.*
Il y en a $n!$.

DÉFINITION 2.7 — **Combinaisons**
Soit E un ensemble de cardinal n et p un entier naturel. On appelle ***combinaison*** *de p éléments de E un sous-ensemble de E contenant p éléments.*

THÉORÈME 2.8 — **Nombre de combinaisons**
Le nombre de combinaisons de p éléments d'un ensemble à n éléments est $\binom{n}{p}$.

COROLLAIRE 2.9 — **Nombre de parties d'un ensemble à n éléments**
Un ensemble E à n éléments possède $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$ sous-ensembles.