

ESPACES VECTORIELS

BCPST I — 2022/2023

ESPACES ET SOUS-ESPACES

Exercice 1

Les ensembles suivants sont-ils des espaces vectoriels sur $\mathbb{K}^n$ (avec la bonne valeur de n) ?

1. $E_1 = \mathbb{K} \times \mathbb{K}$
2. $E_2 = \mathbb{K}^* \times \mathbb{K}^*$
3. $E_3 = \{0\} \times \mathbb{K}$
4. $E_4 = \mathbb{K}^2 \setminus \{(0, 1)\}$
5. $E_5 = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$
6. $E_6 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{K}^4, 2x + 3y - 4z = 0\}$
7. $E_7 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$
8. $E_8 = \{(a, b, a + b) \in \mathbb{K}^3, a \in \mathbb{K}, b \in \mathbb{K}\}$
9. $E_9 = \{(a, b, 1), \text{ avec } a \in \mathbb{K}, b \in \mathbb{K}\}$

Exercice 2

Les s.-e.v. de $\mathbb{K}^n$ peuvent être définis de 3 façons différentes :

— Par des équations cartésiennes :

$$A = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{K}^4 \text{ tel que } x - y + z = 0 \text{ et } y - 2t = 0\}$$

— Par un paramétrage :

$$B = \{(2a - 3b + c, a + 2b - c, -b + c, a) \text{ avec } (a, b, c) \in \mathbb{K}^3\}$$

— Par la donnée d'une famille génératrice (qui peut-être une base ou non) :

$$C = \text{Vect}((1, 2, -1, 0), (0, 2, 2, 1))$$

1. Écrire chacun de ces ensembles sous les trois formes possibles.
2. Procéder de même avec $A \cap B$, $A \cap C$ et $A \cap B \cap C$.

★ Exercice 3

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}^n$. Montrer que $F \cup G$ est un espace vectoriel si et seulement si on a : $F \subset G$ ou $G \subset F$.

FAMILLES DE VECTEURS

Exercice 4

Vrai ou faux ?

1. Une famille de vecteurs est libre ssi ses vecteurs ne sont pas colinéaires deux à deux.
2. Une famille est liée ssi chacun de ses vecteurs est combinaison linéaire des autres.
3. Une famille génératrice finie ne peut pas avoir moins de vecteurs qu'une famille libre.
4. Dans un e.v. de dimension n , toute famille de plus de n vecteurs est liée.
5. Dans un e.v. de dimension n , toute famille de moins de n vecteurs est libre.
6. Dans un e.v. de dimension n , toute famille de n vecteurs est une base.

Exercice 5

Dans $\mathbb{K}^3$, on définit les vecteurs $v_1 = (2, 3, -1)$, $v_2 = (1, -1, -2)$, $w_1 = (3, 7, 0)$ et $w_2 = (5, 0, -7)$.

Montrer que $\text{Vect}(v_1, v_2) = \text{Vect}(w_1, w_2)$.

Exercice 6

Les familles suivantes de $\mathbb{K}^3$ sont-elles libres ou liées ?

1. $u_1 = (1, 1, 0)$, $u_2 = (0, 1, 1)$
2. $u_1 = (0, 0, 1)$, $u_2 = (0, 1, 1)$, $u_3 = (1, 1, 1)$
3. $u_1 = (1, -1, 0)$, $u_2 = (0, 1, -1)$, $u_3 = (1, -1, 0)$
4. $u_1 = (1, 1, -1)$, $u_2 = (1, -1, 1)$, $u_3 = (-1, 1, 1)$, $u_4 = (4, 3, -1)$
5. $u_1 = (1, 0, -2)$, $u_2 = (2, 3, 1)$, $u_3 = (4, -2, 1)$

Exercice 7

Dans $\mathbb{R}^4$, on pose $x_1 = (2, 1, -1, 1)$, $x_2 = (1, 3, 1, 1)$, $x_3 = (-1, 2, -1, -1)$ et $x_4 = (1, -2, 4, 2)$. La famille (x_1, x_2, x_3, x_4) est-elle libre ?

Exercice 8

On pose $e_1 = (1, -1, 2)$ et $e_2 = (1, 1, -1)$.

1. Déterminer une équation cartésienne de $F = \text{Vect}(e_1, e_2)$.
2. Parmi les vecteurs suivants, lesquels sont dans F ?

$$\begin{aligned} a &= (3, 1, 0) & b &= (4, 1, 0) \\ c &= (10, -4, 11) & d &= (-1, -3, 4) \end{aligned}$$

3. Expliciter les décompositions des vecteurs qui sont dans F .

Exercice 9

Dans $\mathbb{C}^4$ on pose $x_1 = (2, -1, 1, 2)$, $x_2 = (1, -1, 2, 4)$, $x_3 = (3, -2, 1, 1)$ et $u = (4, -3, -1, -5)$. Le vecteur u est-il combinaison linéaire de (x_1, x_2, x_3) ?

Exercice 10

Dans $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique (e_1, e_2, e_3) on pose $u_1 = (1, a, 2a)$, $u_2 = (a, -a, -4)$ et $u_3 = (2a, 1, a)$. Pour quelles valeurs de a la famille (u_1, u_2, u_3) est-elle une base de $\mathbb{R}^3$? Pour ces valeurs de a , donner les coordonnées de $x = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$ dans cette base.

Exercice 11

Dans $\mathbb{C}^2$ on pose $v_1 = (1+i, 1-i)$ et $v_2 = (2i, 3)$. Montrer que (v_1, v_2) est une base de $\mathbb{C}^2$ et donner les coordonnées de $x = x_1e_1 + x_2e_2$ dans cette base.

BASES**Exercice 12**

Dans $\mathbb{K}^3$, on définit les vecteurs $v_1 = (1, 1, -1)$, $v_2 = (1, 0, 1)$ et $v_3 = (1, 1, 0)$.

1. Montrer que ces vecteurs forment une base de $\mathbb{K}^3$.
2. Exprimer le vecteur $w = (1, 2, 1)$ dans cette base.

Exercice 13

Déterminer une base de chacun des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}^3$ définis par :

1. $E = \text{Vect}((1, 1, -2), (2, 1, -3), (0, 1, -1))$
2. $F = \text{Vect}((4, -5, 3), (2, 3, -2), (4, -16, 10), (8, 1, -1))$

Exercice 14

Soit $E = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{K}^4 / x - y + z - t = 0\}$ et $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{K}^4 / x = y\}$.

1. Montrer que E et F sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}^4$.
2. Déterminer une base de E , de F et de $E \cap F$.

Exercice 15

On considère les sous-ensembles de $\mathbb{K}^5$:

$F = \{(x, y, z, t, u) \in \mathbb{K}^5 / x + y + z = 0 \text{ et } x + u - t = 0\}$
et $G = \{(x, y, z, t, u) \in \mathbb{K}^5 / x + y - z + t = 0\}$.

Montrer que F et G sont des s.-e.v. de $\mathbb{K}^5$. En donner une base et la dimension. Étudier $F \cap G$.

Exercice 16

Dans $\mathbb{K}^4$, montrer que l'ensemble E des $u = (x, y, z, t)$ tels que $x + 3y - 2z - 5t = 0$ et $x + 2y + z - t = 0$ est un sous-espace vectoriel. En donner la dimension et une base.

Exercice 17

Compléter en une base de $\mathbb{K}^4$ la famille $u_1 = (1, 1, 1, 1)$, $u_2 = (1, 1, -1, -1)$.

Exercice 18

On considère les vecteurs de $\mathbb{K}^4$ suivants

$$\begin{aligned} x &= (1, -1, 1, 1) & y &= (0, 1, 1, -1) \\ u &= (1, 0, 1, 0) & v &= (1, -2, -1, 2) & w &= (2, -1, 1, 1) \\ k &= (1, 1, 2, -1) & l &= (1, 1, 0, 0) & m &= (0, 0, 1, 1) \end{aligned}$$

1. Montrer que $\mathcal{L} = (x, y)$ est libre et que $\mathcal{G} = (u, v, w, k, l, m)$ est une famille génératrice de $\mathbb{K}^4$.
2. Compléter $\mathcal{L}$ en une base de $\mathbb{K}^4$ en puisant dans $\mathcal{G}$.

Exercice 19

Vérifier que les ensembles suivants sont des espaces vectoriels et en trouver une base.

1. $E = \{(x + y, x, y, 2x - 3y) \text{ tel que } x, y \in \mathbb{R}\}$;
2. $E = \{P \in \mathbb{R}_n[X] \text{ tel que } P(1) = 0\}$;
3. $E = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 / 2a - 5b = 0, b + 4c = 0\}$;
4. $E = \text{Vect}(f_1, f_2, f_3)$ avec pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_1(x) = x + 1$, $f_2(x) = x - 1$, $f_3(x) = 2 - x$;
5. $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } 5x + 2y - 3z = 0\}$;
6. $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \text{ tel que } x + y + 3z + t = 0, 2x + y + 4z + t = 0, x = -z\}$

Exercice 20

Soit $E = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{K}^4 / x + y + z + t = 0\}$ et $F = \{(\lambda, \lambda, \lambda, \lambda) / \lambda \in \mathbb{K}\}$.

1. Montrer que E et F sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}^4$. Donner une base de chacun d'entre eux. Déterminer la dimension de E et F .
2. Démontrer qu'en réunissant les deux bases de E et F déterminées précédemment, on obtient une base de $\mathbb{K}^4$.
3. Démontrer que tout vecteur de $\mathbb{K}^4$ peut s'écrire de façon unique comme somme d'un vecteur de E et d'un vecteur de F .

RANG D'UNE FAMILLE DE VECTEURS

Exercice 21

Calculer le rang des familles de vecteurs suivantes :

1. dans $\mathbb{K}^3$: (u, v, w) avec $u = (1, 1, 4)$, $v = (2, -2, 8)$ et $w = (1, -3, 4)$;
2. dans $\mathbb{K}^4$: (x, y, z, t) avec $x = (1, -4, 0, 3)$, $y = (-2, 8, 0, -6)$, $z = (-1, 4, 0, -3)$ et $t = (3, -12, 0, 9)$;
3. dans $\mathbb{K}^3$: (a, b, c) avec $a = (1/2, 2/3, 4/3)$, $b = (1/2, -2/3, 8/3)$ et $c = (1/2, 1/3, 5/3)$.

Exercice 22

Déterminer le rang de la famille de vecteurs $\mathcal{F}$:

1. $\mathcal{F} = ((0, 0, 1, 1), (0, 1, -7, -1), (18, 0, \pi, 3))$;
2. $\mathcal{F} = ((1, 1, 1, 1), (0, 1, 2, -1), (1, 0, -2, 3), (2, 1, 0, -1))$;
3. $\mathcal{F} = ((1, 0, 1, 0), (2, 1, 0, 1), (0, 2, -1, 1), (3, -1, 2, 0))$;
4. $\mathcal{F} = ((1, 0, 2, 3), (7, 4, -2, 1), (5, 2, 4, 7), (3, 2, 0, 1))$.

Exercice 23

Rang de la famille (u_1, u_2, u_3, u_4) avec $u_1 = (\lambda, 1, 1, 1)$, $u_2 = (1, \lambda, 1, 1)$, $u_3 = (1, 1, \lambda, 1)$, $u_4 = (1, 1, 1, \lambda)$. Discuter suivant les valeurs de $\lambda \in \mathbb{K}$.

Exercice 24

Donner le rang des matrices suivantes. Lorsque c'est possible, les inverser :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ b & 1 & a \\ a & b & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 25

Soient a, b et c trois éléments de $\mathbb{K}$.

1. Montrer que la famille $((1, a, a^2), (1, b, b^2), (1, c, c^2))$ est libre dans $\mathbb{K}^3$ ssi a, b et c sont deux à deux distincts.
2. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $((1, 1, 1), (a, b, c), (a^2, b^2, c^2))$ soit libre dans $\mathbb{K}^3$.

SUJETS DIVERS

Exercice 26 — Équation cartésienne

Soit $E = \mathbb{R}^n$ et $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ un élément de E .

1. Soit H_a l'ensemble des $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in E$ tels que $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = 0$.
Montrer que H_a est un hyperplan de E . Donner une interprétation simple de H quand $n = 1, 2, 3$.
2. Soit $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ un élément de E et H_b l'ensemble des $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in E$ tels que $b_1x_1 + b_2x_2 + \dots + b_nx_n = 0$.
Montrer que si (a, b) est libre alors $H_a \cap H_b$ est un s.-e.v. de E de dimension $n-2$, et que sinon $H_a = H_b$.
3. Soit $(a_1, a_2, \dots, a_p)$ une famille de p vecteurs de E . Montrer par récurrence sur p que $H_{a_1} \cap H_{a_2} \cap \dots \cap H_{a_p}$ est un s.-e.v. de E de dimension $p-r$ où r est le rang de $(a_1, a_2, \dots, a_p)$.

Exercice 27

1. Déterminer des équations cartésiennes du sous-espace de $\mathbb{K}^5$ dont une base est $\mathcal{B} = ((1, 2, 3, 4, 5), (6, 7, 0, 9, 10))$.
2. Déterminer une base du sous-espace vectoriel dont des équations cartésiennes sont
$$\begin{cases} x + 2y + 3z + 4t + 5u = 0 \\ x + y = z + t = u \end{cases}.$$

Exercice 28

Soient $e_1(0, 1, -2, 1)$, $e_2(1, 0, 2, -1)$, $e_3(3, 2, 2, -1)$, $e_4(0, 0, 1, 0)$ et $e_5(0, 0, 0, 1)$ des vecteurs de $\mathbb{K}^4$.

Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier votre réponse.

1. $\text{Vect}(e_1, e_2, e_3) = \text{Vect}((1, 1, 0, 0), (-1, 1, -4, 2))$.
2. $(1, 1, 0, 0) \in \text{Vect}(e_1, e_2) \cap \text{Vect}(e_2, e_3, e_4)$.
3. $\dim(\text{Vect}(e_1, e_2) \cap \text{Vect}(e_2, e_3, e_4)) = 1$.

Exercice 29

Soit E un $\mathbb{K}$ -e.v. tel que E contient au moins un vecteur non nul, noté v .

1. Montrer que les éléments de $A = \{nv, n \in \mathbb{N}\}$ sont deux à deux distincts.
2. En déduire que l'ensemble E est infini. Existe-t-il des $\mathbb{K}$ -e.v. qui soient aussi des ensembles finis ?

