Espaces vectoriels

bcpst 1 — 2022/2023

NOTATIONS DU CHAPITRE

Dans ce chapitre $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I — ESPACES VECTORIELS

DÉFINITION I.1 — Opération dans l'ensemble $\mathbb{K}^n$

L'ensemble $\mathbb{K}^n$ est muni des deux opérations

1. *l'addition vectorielle :*

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) \overset{\text{déf.}}{=} (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$$

2. *et du produit par un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$:*

$$\lambda \,.\, (x_1, x_2, \dots, x_n) \overset{\text{déf.}}{=} (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n)$$

On définit, de plus, le vecteur nul de $\mathbb{K}^n$ est $(\underbrace{0, 0, \dots, 0}_{n \text{ fois}})$.

THÉORÈME I.2 — Espace vectoriels sur $\mathbb{K}$

L'ensemble $E = \mathbb{K}^n$ muni des opérations précédentes vérifient les propriétés :

1) E est non vide.

*2) La loi de composition interne notée + et appelée **addition vectorielle** vérifie les propriétés*

$$\begin{array}{lcr}
\forall (x, y, z) \in E^3, & x + (y + z) = (x + y) + z & \textit{associativité} \\
\forall (x, y) \in E^2, & x + y = y + x & \textit{commutativité} \\
\exists e \in E, \ \ \forall x \in E, & x + e = x & \textit{existence d'un élément neutre} \\
\forall x \in E, \ \ \exists x' \in E, & x + x' = e & \textit{existence d'un opposé}
\end{array}$$

*3) La loi externe sur $\mathbb{K}$ notée . appelée **multiplication par un scalaire** vérifie les propriétés*

$$\begin{array}{lc}
\forall x \in E, & 1 \,.\, x = x \\
\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \ \ \forall x \in E, & (\lambda + \mu) \,.\, x = \lambda \,.\, x + \mu \,.\, x \\
\forall \lambda \in \mathbb{K}, \ \ \forall (x, y) \in E^2, & \lambda \,.\, (x + y) = \lambda \,.\, x + \lambda \,.\, y \\
\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \ \ \forall x \in E, & \lambda \,.\, (\mu \,.\, x) = (\lambda \times \mu) \,.\, x
\end{array}$$

*On qualifie K^n d'**espace vectoriel**.*

Définition 1.3 — **Sous-espace vectoriel**
Soit $E = \mathbb{K}^n$ et F un sous-ensemble de E. On dit que F est un ***sous-espace vectoriel*** *de E si et seulement si*

1) $F \neq \varnothing$;
2) *pour tout couple* $(u, v) \in F^2$ *on a* $u + v \in F$;
3) *pour tout scalaire* $\lambda \in \mathbb{K}$ *et tout vecteur* $u \in F$ *on a* $\lambda u \in F$

Théorème 1.4 — **Intersection de sous-espace vectoriel**
Soit $E = \mathbb{K}^n$. Toute intersection de sous-espace vectoriel de E est un sous-espace vectoriel de E.

II — Famille de vecteurs

Définition 2.1 — **Famille de vecteurs**
Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $E = \mathbb{K}^n$.
On appelle ***famille de p vecteurs de E*** *la donnée d'un élément de E^p, noté $(u_1, u_2, \dots, u_p)$.*

Attention ! L'ordre des vecteurs compte ! Par exemple, la famille (u_1, u_2, u_3) n'est pas la famille (u_1, u_3, u_2).

Définition 2.2 — **Combinaison linéaire**
Soit $E = \mathbb{K}^n$, $\mathscr{F} = (u_1, u_2, \dots, u_p)$ une famille de de p vecteurs de E, et $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p$.
On appelle ***combinaison linéaire*** *des u_i affectés des coefficients λ_i le vecteur*

$$u = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_p u_p = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i u_i$$

On dit que le vecteur u est combinaison linéaire des vecteurs de la famille $\mathscr{F}$ ou encore que u ***se décompose*** *suivant $\mathscr{F}$.*

Définition 2.3 — **Espace vectoriel engendré**
Soit $E = \mathbb{K}^n$ et $(u_1, u_2, \dots, u_p)$ une famille de p vecteurs de E.
L'ensemble des vecteurs qui sont combinaisons linéaires des u_i est un sous-espace vectoriel de E.
C'est l'espace vectoriel ***engendré*** *par la famille $(u_1, \dots, u_p)$, noté* $\mathbf{Vect(u_1, \dots, u_p)}$.

Définition 2.4 — **Famille génératrice**
Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$.
S'il existe une famille $(u_1, u_2, \dots, u_p)$ de vecteurs de E telle que $F = \mathrm{Vect}(u_1, u_2, \dots, u_p)$, alors on dit que la famille $(u_1, u_2, \dots, u_p)$ ***engendre*** *l'espace vectoriel F ou encore qu'elle est une* ***famille génératrice*** *de F.*

Proposition 2.5 — **Opérations sur les familles génératrices**

Soit $\mathscr{B} = (u_1, u_2, \dots, u_p)$ une famille de vecteurs de $\mathbb{K}^n$ et $F = \mathrm{Vect}(u_1, u_2, \dots, u_p)$.
L'ensemble F est aussi engendré par la famille de vecteurs obtenue en

1) *permutant les vecteurs de $\mathscr{B}$;*
2) *ajoutant ou retirant le vecteur nul à $\mathscr{B}$;*
3) *multipliant un vecteur de $\mathscr{B}$ par un scalaire non nul ;*
4) *ajoutant à un vecteur de $\mathscr{B}$ une combinaison linéaire des autres ;*
5) *retirant un vecteur de $\mathscr{B}$ qui est combinaison linéaire des autres.*

Définition 2.6 — **Famille libre**

Soit $(u_1, u_2, \dots, u_p)$ une famille de vecteurs de $\mathbb{K}^n$.
Cette famille est ***libre*** *si et seulement si l'équation d'inconnues $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p)$*

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_p u_p = 0_{\mathbb{K}^n}$$

admet pour unique solution $(0, 0, \dots, 0)$.

Proposition 2.7

Dans $\mathbb{K}^n$,

- *la famille (e_1) est libre si et seulement si e_1 est non nul ;*
- *la famille (e_1, e_2) est liée si et seulement si l'un des vecteurs est égal à l'autre multiplié par un scalaire (on dit qu'ils sont* ***colinéaires****).*

Théorème 2.8 — **Caractérisation d'une famille libre**

Une famille d'au moins deux vecteurs de $\mathbb{K}^n$ est libre si et seulement si aucun vecteur de la famille n'est combinaison linéaire des autres.

Vocabulaire Une famille qui n'est pas libre est dite **liée**.

Propriété 2.9

- *Toute sous-famille d'une famille libre est libre ;*
- *toute sur-famille d'une famille liée est liée ;*
- *en ajoutant à une famille libre un vecteur qui n'est pas combinaison linéaire des vecteurs de cette famille, la famille obtenue est libre.*

Propriété 2.10 — Unicité de la décomposition sur une famille libre
Soit $(u_1, u_2, \dots, u_p)$ une famille de vecteurs de $\mathbb{K}^n$.
La famille $(u_1, u_2, \dots, u_p)$ est libre si et seulement si tout vecteur u de $\mathrm{Vect}(u_1, u_2, \dots, u_p)$ se décompose d'une manière unique

$$\forall u \in \mathrm{Vect}(u_1, u_2, \dots, u_p),\ \exists!(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^n, \qquad u = \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n$$

III — Base, dimension finie

Définition 3.1 — Base
*Une famille $(u_1, u_2, \dots, u_p)$ est une **base** d'un $\mathbb{K}$–espace vectoriel E si et seulement si $(u_1, u_2, \dots, u_p)$ est une famille libre et génératrice de E.*

Théorème 3.2 — Caractérisation d'une base
La famille $\mathscr{B} = (u_1, u_2, \dots, u_p)$ est une base d'un $\mathbb{K}$–espace vectoriel E si et seulement si

$$\forall u \in E, \quad \exists!(x_1, x_2, \dots, x_p), \qquad u = x_1 u_1 + x_2 u_2 + \cdots + x_n u_n$$

*Les scalaires $(x_1, x_2, \dots, x_p)$ s'appellent les **coordonnées** de u selon la base $\mathscr{B}$.*

Définition 3.3 — Dimension finie
*On dit qu'un $\mathbb{K}$–espace vectoriel E est **de dimension finie** si et seulement si il existe une base finie de E ou si E est réduit au vecteur nul.*

Théorème 3.4 — Théorème de la dimension
Soit E un espace vectoriel de dimension finie.
*Si E n'est pas réduit au vecteur nul, toutes les bases de E ont le même nombre de vecteurs. On appelle ce nombre la **dimension** de E et on le note $\dim E$ ou encore $\dim_{\mathbb{K}} E$.*
Si E est réduit au vecteur nul alors, par convention, $\dim E = 0$.

Théorème 3.5 — Extraction d'une base
Soit E un espace vectoriel.
De toute famille génératrice de E on peut extraire une base de E.

Corollaire 3.6 — Famille génératrice et dimension
Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Une famille génératrice de E contient au moins $\dim E$ vecteurs.

THÉORÈME 3.7 — Théorème de la base incomplète
Soit E un espace vectoriel de dimension finie.
On peut compléter une famille libre quelconque de E en une base de E.

COROLLAIRE 3.8 — Famille libre et dimension
Soit E un sous-espace vectoriel de dimension finie. Une famille libre de E contient au plus $\dim E$ vecteurs.

COROLLAIRE 3.9 — Base et dimension
Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $\mathscr{F}$ une famille de $\dim E$ vecteurs de E.

$$\mathscr{E} \text{ est libre} \iff \mathscr{E} \text{ est génératrice de } E \iff \mathscr{E} \text{ est une base de } E$$

COROLLAIRE 3.10 — Dimension d'un sous-espace vectoriel
Soit E un espace vectoriel de dimension finie et F un sous-espace vectoriel de E.
Alors F est un ev de dimension finie, et $\dim F \leqslant \dim E$.
De plus $\dim F = \dim E$ si et seulement si $F = E$.

DÉFINITION 3.11 — Rang d'une famille de vecteurs
Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $\mathscr{C} = (u_1, u_2, \dots, u_p)$ une famille de p vecteurs de E.
*On appelle **rang** de la famille $\mathscr{C}$ la dimension de l'espace vectoriel $\operatorname{Vect}(u_1, u_2, \dots, u_p)$:*

$$\operatorname{rg}(u_1, u_2, \dots, u_p) = \dim(\operatorname{Vect}(u_1, u_2, \dots, u_p))$$

PROPOSITION 3.12 — Rang et familles de vecteurs
Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $\mathscr{C} = (u_1, u_2, \dots, u_p)$ une famille de p vecteurs de E.

- *$\mathscr{C}$ est une famille génératrice de E si et seulement si $\operatorname{rg} \mathscr{C} = \dim E$;*
- *$\mathscr{C}$ est une famille libre si et seulement si $\operatorname{rg} \mathscr{C} = \# \mathscr{C}$;*
- *$\mathscr{C}$ est une base de E si et seulement si $\operatorname{rg} \mathscr{C} = \# \mathscr{C} = \dim E$.*

IV — UTILISATION DES MATRICES

DÉFINITION 4.1 — Matrice représentant un vecteur
Soit E un espace vectoriel de dimension n et $\mathscr{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E.
Si u est un vecteur de E alors

$$\exists!(u_1, u_2, \dots, u_n) \in \mathbb{K}^n, \qquad u = u_1 e_1 + u_2 e_2 + \dots + u_n e_n$$

La matrice représentant le vecteur u dans la base $\mathscr{B}$ est la matrice colonne $U_{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_n \end{pmatrix}^T$.
Réciproquement, à toute matrice colonne $U \in \mathscr{M}_{1,n}(\mathbb{K})$ on associe une unique vecteur u de E tel que U représente u dans la base $\mathscr{B}$.

Définition 4.2 — **Matrice représentant une famille de vecteurs**

Soit $E = \mathbb{K}^n$ de dimension n, $\mathscr{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E et $\mathscr{C} = (u_1, u_2, \dots, u_p)$ une famille de p vecteur de E.

On a alors

$$\forall k \in [\![1\,;\,p]\!], \quad \exists!\,(u_{1k}, \dots, u_{nk}) \in \mathbb{K}^n, \qquad u_k = u_{1k}e_1 + u_{2k}e_2 + \cdots + u_{nk}e_n$$

On appelle matrice représentant le vecteur u dans la base $\mathscr{B}$ la matrice $C = (u_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}}$.

Définition 4.3 — **Rang d'une matrice**

Soit $M \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ une matrice à n lignes et p colonnes. D'après la définition précédente, cette matrice représente une famille de p vecteurs de $\mathbb{K}^n$ dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$.

On appelle ***rang de la matrice*** *M le rang de la famille de vecteurs ainsi définie.*

Théorème 4.4 — **Rang et opérations sur une matrice**

Soit une matrice $M \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

On ne modifie pas le rang de M en

1) *permutant les colonnes de M ;*
2) *ajoutant ou retirant une colonne nulle à M ;*
3) *multipliant une colonne de M par un scalaire non nul ;*
4) *ajoutant à une colonne de M une combinaison linéaire des autres ;*
5) *retirant une colonne de M qui est combinaison linéaire des autres.*

Théorème 4.5

Une matrice carrée d'ordre n est inversible si et seulement si elle est de rang n.

Nous admettons alors le théorème suivant (qui sera démontré l'année prochaine). Le théorème suivant, très utile en pratique, est également admis (même l'année prochaine).

Théorème 4.6 — **Rang de la transposée**

Soit une matrice $M \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$: $\qquad \mathrm{rg}(M) = \mathrm{rg}(M^T)$

Corollaire 4.7

On peut effectuer les opérations du théorème 4.4 sur les lignes d'une matrice sans en changer le rang.