Géométrie

BCPST 1 — 2022/2023

Droites et plans

Exercice 1

On considère le point $C=(5,2)$ et une droite D. Soit Δ la parallèle à D passant par C et Δ' la perpendiculaire à D passant par C.

Écrire les équations et les représentations paramétriques de Δ et Δ' dans chacun des cas suivants :

1. D a pour équation $x-2y+4=0$;
2. D a pour représentation paramétrique $\begin{cases} x=-3+4t \\ y=5-3t \end{cases}$;
3. D passe par les points $A=(3,-2)$ et $B=(-1,4)$;
4. D a pour coefficient directeur $m\in\mathbb{R}^*$.

Exercice 2

Vérifier que le point $A(1,1,1)$ et les vecteurs $\overrightarrow{u}=(-1,2,-2)$ et $\overrightarrow{u}'=(2,-2,1)$ définissent bien un plan dans l'espace. En donner une équation paramétrique.

Exercice 3

Trouver deux repères du plan d'équation $x+2y-3z=1$ dont l'un soit orthonormal.

Exercice 4

Dans $\mathbb{R}^3$, donner une représentation paramétrique de la droite D définie par le couple d'équations $\begin{cases} x+y=1 \\ x-2y+z+4=0 \end{cases}$.

Exercice 5

Vérifier que les plans P et P' donnés par les représentations paramétriques suivantes sont confondus :

$$P\begin{cases} x=2+t+2t' \\ y=-1+2t-t' \\ z=3t+t' \end{cases} \qquad P'\begin{cases} x=1+t \\ y=1+t \\ z=1+t+t' \end{cases}$$

Exercice 6

Vérifier que la droite D passant par le point $A=(0,1/2,0)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}=(-4,1,2)$ et la droite D' passant par le point $A'=(-2,0,2)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}=(4,-4,1)$ sont coplanaires et écrire une équation de ce plan.

Exercice 7

1. Écrire une équation du plan passant par le point $A=(1,0,-1)$ et parallèle au plan Q d'équation $x+3y-3z-1=0$.
2. Déterminer la droite Δ passant par A, parallèle à Q et rencontrant la droite (Oz) en un point que l'on précisera.

Exercice 8

1. Calculer la distance du point $A(1,2,3)$ à la droite D d'équations
$$\left\{\begin{array}{rcl} x+y-2z-1 & = & 0 \\ 2x-y+z+1 & = & 0 \end{array}\right. .$$
2. Déterminer la perpendiculaire commune Δ des deux droites
$$D\begin{cases} x-y-z-2=0 \\ x-2y-3z+1=0 \end{cases} \quad D'\begin{cases} x+y+2z-1=0 \\ 2x+y+z+2=0 \end{cases}$$
et calculer la distance séparant D et D'.

Exercice 9

Écrire une équation du plan passant par $A=(1,0,-1)$ et perpendiculaire à la droite D de couple d'équation $\begin{cases} x=1-2z \\ y=-3+z \end{cases}$.

Exercice 10

Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Montrez que :

1. $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=\dfrac{1}{2}\left[\left\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\right\|^2-\left\|\overrightarrow{u}\right\|^2-\left\|\overrightarrow{v}\right\|^2\right]$;
2. $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=\dfrac{1}{4}\left[\left\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\right\|^2-\left\|\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}\right\|^2\right]$;
3. $\left\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\right\|^2-\left\|\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}\right\|^2=2\left(\|u\|^2+\|v\|^2\right)$ (égalité du parallélogramme) ;
4. $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=0$ ssi $\left\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\right\|=\left\|\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}\right\|$ (propriété du rectangle).

Exercice 11

Soit $\left(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$ un repère orthonormé. Calculer la distance de $M(5,4,3)$ à la droite D d'équations : $x+2y-2z=0$ et $y+3z=0$.

Exercice 12

Soit M un point décrivant la droite D passant par $A(1,1,1)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(2,3,4)$. Soit M' un point décrivant la droite D' de système d'équations

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ x-2y+z-1=0 \end{cases}$$

Trouver la position des points M et M' telle que la distance entre ces deux points soit minimale.
Montrer qu'alors la droite (MM') est à la fois perpendiculaire à D et à D'.

Exercice 13
Soit $\left(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$ un repère orthonormé. Montrer que les droites :

$$D\ :\begin{cases} x=2+z \\ y=-1-3z \end{cases} \quad \text{et} \quad D'\ :\ \begin{cases} x+2y+z-4=0 \\ 3x+3y+2z-7=0 \end{cases}$$

sont concourantes, et donner l'équation du plan qui les contient.

Exercice 14
Soient les deux droites :

$$D:\begin{cases} x+y+z=a \\ 3x-2y-2z=0 \end{cases} \quad \text{et} \quad D':\begin{cases} A(1,1,1) \\ B(2,2,1) \end{cases}$$

Déterminer a pour que les droites D et D' appartiennent à un même plan. Donner alors l'équation de ce plan.

Exercice 15
Étudier l'intersection des plans P et Q définis de façon paramétrique par :

$$P:\begin{cases} x=2+\lambda+2\mu \\ y=2+2\lambda+\mu \\ z=1-\lambda-\mu \end{cases} \quad \text{et} \quad Q:\begin{cases} x=1+3\lambda-\mu \\ y=3+3\lambda+\mu \\ z=1-2\lambda \end{cases}$$

Exercice 16
Donner l'expression analytique de la projection orthogonale sur la droite D d'équation paramétrique :

$$\begin{cases} x=1+t \\ y=2+t \\ z=-2t \end{cases}$$

Idem pour la symétrie (orthogonale) par rapport à cette droite.

Exercice 17
Projeté orthogonale de la droite

$$D:\begin{cases} x+y+z-1=0 \\ x-y-2z=0 \end{cases}$$

sur le plan $P: x+2y+3z-6=0$.

Cercles

★ **Exercice 18**
Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ on considère deux points $A(a,0)$ et $B(0,b)$ et un point quelconque $M(x,y)$.

1. Déterminer les coordonnées de P, Q et R les projetés orthogonaux de M sur les droites (OA), (OB) et (AB).
2. Donner une équation cartésienne du cercle $\mathscr{C}$ circonscrit au triangle OAB.
3. Démontrer que M appartient à $\mathscr{C}$ ssi les points P, Q et R sont alignés.

Exercice 19
Soit $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ un repère orthonormé. Déterminer l'équation des tangentes issues de $M(\sqrt{5},\sqrt{5})$ au cercle d'équation $x^2+y^2=1$.

Exercice 20
On considère la sphère de centre O et de rayon 1, et D la droite passant par le point $A(2,0,0)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(1,1,0)$. Équation des plans tangents à la sphère et contenant la droite D.

Tombés au concours

Exercice 21 *(INA 04)*
Le plan est rapporté à un repère orthonormal.

1. On note $A(1,0)$ et $B(0,1)$. Donner l'équation du cercle $\mathscr{C}$ passant par O, A et B.
2. Soit $M(a,b)$ un point du plan. Calculer les coordonnées du projeté orthogonal de M sur la droite (AB).
3. Montrer que les projetés de M sur (AB), (OA) et (OB) sont alignés si et seulement si M est sur le cercle $\mathscr{C}$.

Exercice 22 *(INA 03)*
On se place dans le repère orthonormé $(O,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j},\overrightarrow{k})$.
Soient les points $A=\begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 \\ b \\ 0 \end{pmatrix}$ et $C=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{pmatrix}$ où a, b, c sont des réels strictement positifs. Notons H le projeté orthogonal de O sur le plan (ABC).

1. Vérifier que $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$ est une équation du plan (ABC).
2. Montrer que H correspond au point d'intersection des trois hauteurs du triangle.

Exercice 23 *(INA 03)*

Notons $A\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix}6\\-2\end{pmatrix}$ trois points du plan affine euclidien.

1. Donner une équation cartésienne de chacune des droites (AB), (BC), et (CA).
2. Déterminer une équation paramétrique de la médiane du triangle (ABC) issue de B.
3. Déterminer une équation paramétrique de la hauteur du triangle (ABC) issue de B et une équation cartésienne de la hauteur du triangle issue de A. En déduire les coordonnées de l'orthocentre H du triangle.
4. Calculer l'aire du triangle (ABC).

Exercice 24 *(INA 07)*

Dans le plan rapporte à un repère orthonormal direct $(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$, on considère trois points A, B, C de coordonnées respectives $(1, 1)$, (a, a^2), et $(-a^2, a)$, avec $a \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, +1\}$.

1. Justifier l'existence de la droite (AB) et de la médiatrice du segment $[BC]$, puis montrer que ces deux droites ne sont pas parallèles.
2. Quand on fait varier a, décrire le lieu du point M intersection de la droite AB et de la médiatrice du segment $[BC]$.