Géométrie euclidienne du plan et de l'espace

bcpst 1 — 2022/2023

NOTATIONS DU CHAPITRE

Dans ce chapitre, $\mathbb{R}^2$ sera qualifié de « plan », $\mathbb{R}^3$ d' « espace » et les éléments de ces ensembles de « vecteurs » ou « points » selon le contexte.

I — VOCABULAIRE ÉLÉMENTAIRE

Ce vocabulaire s'applique au plan comme à l'espace.

- Deux points A et B étant donnés, on note $B-A$ sous la forme $\overrightarrow{AB}$.
- Deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont **colinéaires l'un à l'autre** si et seulement si il existe un réel k tel que $\overrightarrow{u}=k\overrightarrow{v}$ *ou* $\overrightarrow{v}=k\overrightarrow{u}$.
- Trois points A, B et C sont **alignés** si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires.

Le vocabulaire suivant ne s'applique qu'au plan...

- Un vecteur non nul $\overrightarrow{u}$ étant donné, on peut définir à l'aide du cercle trigonométrique l'angle orienté entre $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{u}$.
- Deux vecteurs non nuls $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ étant donnés, on peut définir à l'aide de l'angle précédent, l'**angle orienté** entre $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.
- Deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont **orthogonaux** si et seulement si l'un des deux est nuls *ou bien* si l'angle orienté entre $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ vaut $\pi/2$ ou $-\pi/2$.

II — PRODUIT SCALAIRE DANS LE PLAN OU DANS L'ESPACE.

DÉFINITION 2.1 — **Produit scalaire de deux vecteurs**

*Soit $\overrightarrow{u}=(x_1,x_2,\dots,x_n)$ et $\overrightarrow{v}=(x'_1,x'_2,\dots,x'_n)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$. On appelle **produit scalaire** de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ le réel*

$$\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}\overset{\text{déf.}}{=}x_1x'_1+x_2x'_2+\dots x_nx'_n$$

PROPRIÉTÉ 2.2 — **Propriétés algébriques du produit scalaire**

Soit $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs, λ et μ deux scalaires

1) $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{u}$
2) $(\lambda\overrightarrow{u}+\mu\overrightarrow{v})\cdot\overrightarrow{w}=\lambda\times\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{w}+\mu\times\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{w}$

DÉFINITION 2.3 — **Norme d'un vecteur**

*Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur. Le réel $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{u}$ est positif. On le nomme **carré scalaire** de $\overrightarrow{u}$. Sa racine carrée est la **norme** de $\overrightarrow{u}$*

$$\left\|\overrightarrow{u}\right\|\overset{\text{déf.}}{=}\sqrt{\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{u}}=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

*La **distance** entre deux points A et B est la norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$: $AB\overset{\text{déf.}}{=}\left\|\overrightarrow{AB}\right\|$.*

PROPRIÉTÉ 2.4 — **Propriété de la norme**

Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs et λ un scalaire.

- $\left\|\overrightarrow{u}\right\| = 0 \Longleftrightarrow \overrightarrow{u} = 0$;
- $\left\|\lambda\overrightarrow{u}\right\| = |\lambda| \times \left\|\overrightarrow{u}\right\|$;
- $\left\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\right\| \leqslant \left\|\overrightarrow{u}\right\| + \left\|\overrightarrow{v}\right\|$ *(inégalité triangulaire).*

Application — Cercle dans le plan

Soit Ω un point du plan et R un réel positif. On appelle cercle de centre Ω et de rayon R l'ensemble des points M tels que $\Omega M = R$. L'équation cartésienne du cercle s'écrit

$$(x-x_\Omega)^2+(y-y_\Omega)^2=R^2$$

DÉFINITION 2.5 — **Orthogonalité de deux vecteurs**

Deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont ***orthogonaux*** *si et seulement si $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=0$.*

PROPRIÉTÉ 2.6 — **Liberté d'une famille orthogonale**

Une famille de vecteurs non nuls et orthogonaux deux à deux est libre.

DÉFINITION 2.7 — **Base orthonormée**

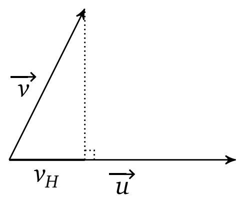
On appelle ***base orthonormée*** *de $\mathbb{R}^n$ la donnée d'une famille de n vecteurs $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \dots, \overrightarrow{e_n})$ tels que*

$$\forall (i,j) \in [\![1\,;n]\!]^2,\ i\neq j,\quad \overrightarrow{e_i}\cdot\overrightarrow{e_j}=0 \qquad et \qquad \forall i \in [\![1\,;n]\!],\quad \left\|\overrightarrow{e_i}\right\|=1$$

THÉORÈME 2.8 — **Expression du produit scalaire dans une base orthonormée**

L'expression du produit scalaire est la même dans toute base orthonormée.

Interprétation géométrique Le produit scalaire de deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ est le produit de la norme de $\overrightarrow{u}$ par la norme du projeté orthogonale de $\overrightarrow{v}$ sur la droite dirigée par $\overrightarrow{u}$.



DÉFINITION 2.9 — **Angle non orienté entre deux vecteurs du plan**

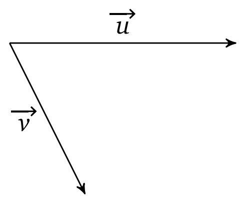
Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non nuls.

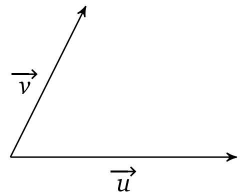
Le réel $\dfrac{u \cdot v}{\|u\|\,\|v\|}$ est compris entre -1 et 1. Il existe donc un unique réel $\alpha \in [\,0\,;\,\pi\,]$ tel que

$$u \cdot \overrightarrow{v} = \|u\|\,\|v\| \cos\alpha$$

On appelle ce réel ***la mesure de l'angle non orienté*** *entre les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.*

Avec le produit scalaire, il n'est pas possible de faire la différence entre les deux figures suivantes





III — DÉTERMINANT DE DEUX VECTEURS DU PLAN

Cette partie n'a de sens que dans le plan $\mathbb{R}^2$.

DÉFINITION 3.1 — **Déterminant de deux vecteurs**

Soit $\overrightarrow{u} = (x, y) \in \mathbb{R}$ et $\overrightarrow{v} = (x', y') \in \mathbb{R}^2$. On appelle ***déterminant de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$*** *le scalaire*

$$\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \overset{\text{déf.}}{=} x y' - x' y$$

PROPRIÉTÉ 3.2 — **Propriétés algébriques du déterminant**

Soit $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs, λ et μ deux scalaires

1) $\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = -\det(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u})$
2) $\det(\lambda \overrightarrow{u} + \mu \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = \lambda \det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}) + \mu \det(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$

THÉORÈME 3.3 — **Colinéarité et déterminant**

Deux vecteurs du plan $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires si et seulement si leur déterminant est nul.

PROPRIÉTÉ 3.4 — **Lien entre produit scalaire et déterminant**

Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs du plan.

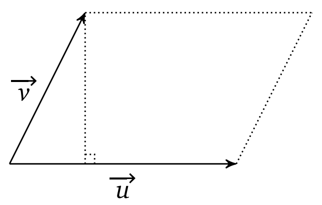
$$\det(u, v)^2 + (\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v})^2 = \left\|\overrightarrow{u}\right\|^2 \left\|\overrightarrow{v}\right\|^2$$

THÉORÈME 3.5 — **Expression du déterminant dans une base orthogonale**

Le déterminant de deux vecteurs a la même expression dans toute base orthonormale de $\mathbb{R}^2$, au signe près.

Définition 3.6 — Interprétation géométrique
L'aire algébrique du parallélogramme défini par deux vecteurs du plan $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ est égale au déterminant des deux vecteurs.

Interprétation géométrique

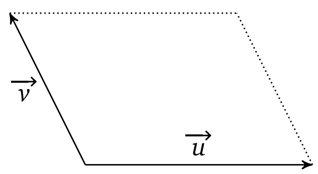


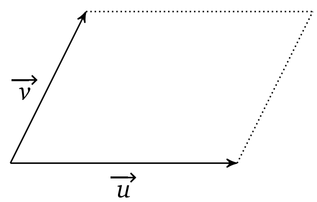
Le déterminant de deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ est l'aire algébrique du parallélogramme qu'ils définissent.

Propriété 3.7
Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non nuls et θ une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$. On a

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \left\|\overrightarrow{u}\right\| \left\|\overrightarrow{v}\right\| \cos\theta \qquad \textit{et} \qquad \det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \left\|\overrightarrow{u}\right\| \left\|\overrightarrow{v}\right\| \sin\theta$$

Avec le déterminant, il n'est pas possible de faire la différence entre les deux figures suivantes





En pratique, on détermine $|\theta|$ avec le produit scalaire et le signe de θ à l'aide du signe du déterminant.

IV — Droites

Définition 4.1 — Droite
Soit A un point et $\overrightarrow{u}$ un vecteur non nul. On appelle ***droite*** *passant par A et dirigée par $\overrightarrow{u}$ l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM}$ est colinéaire à $\overrightarrow{u}$.*
On notera cette droite $D(A, \overrightarrow{u})$.

Équation paramétrique d'une droite dans le plan **Dans le plan ou dans l'espace :** Soit A un point et $\overrightarrow{u}$ un vecteur non nul

$$M \in D(A, \overrightarrow{u}) \iff \exists t \in \mathbb{R}, \quad \overrightarrow{AM} = t\,\overrightarrow{u}$$

Dans le plan : Si $A(x_A, y_A)$ et $\overrightarrow{u}(x_u, y_u)$ alors

$$M(x, y) \in \iff \begin{cases} x = x_A + x_u t \\ y = y_A + y_u t \end{cases} \qquad \text{avec } t \in \mathbb{R}$$

Dans l'espace : Si $A(x_A, y_A, z_A)$ et $\overrightarrow{u}(x_u, y_u, z_u)$ alors

$$M(x,y,z) \in D(A, \overrightarrow{u}) \iff \begin{cases} x = x_A + x_u t \\ y = y_A + y_u t \\ z = z_A + z_u t \end{cases} \qquad \text{avec } t \in \mathbb{R}$$

Équation cartésienne d'une droite dans le plan
La colinéarité de $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{u}(x_u, y_u)$ s'exprime à l'aide du déterminant

$$M(x,y) \in D(A, \overrightarrow{u}) \iff \det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{u}) = 0 \iff -y_u\ x + x_u\ y + y_y\ x_A - x_u\ y_A = 0$$

Réciproquement, l'ensemble D d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$ est une droite de vecteur directeur $(-b, a)$.
Pente d'une droite non parallèle à (Oy)
Soit $m \in \mathbb{R}$ et $p \in \mathbb{R}$. L'ensemble des points $M(x,y)$ vérifiant l'équation $y = mx + p$ est une droite. On appelle m la **pente de la droite** et p son **ordonnée à l'origine**. La droite est dirigée par le vecteur $(1, m)$ qui fait l'angle orienté $\text{Arctan}(m)$ avec le vecteur $(1, 0)$.
Seules les droites non parallèles à (Oy) admettent une équation de la forme $y = mx + p$.

V — Plans

Définition 5.1 — **Plan**
Soit A un point de l'espace et $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs tels que $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ forment une famille libre. On appelle ***plan passant par A et dirigé par*** $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ *l'ensemble des points M tel que $(\overrightarrow{AM}, u, v)$ est liée. On notera ce plan $P(A, u, v)$.*
Une famille de vecteurs libres dirigeant $P(A, u, v)$ est une ***base*** *du plan P.*

Équation paramétrique d'un plan dans l'espace Si $A(x_A, y_A, z_A)$ et $\overrightarrow{u}(x_u, y_u, z_u)$ et $\overrightarrow{v}(x_v, y_v, z_v)$ alors

$$\begin{aligned} M(x,y,z) \in P(A, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) &\iff \exists(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } \overrightarrow{AM} = \lambda_1 \overrightarrow{u} + \lambda_2 \overrightarrow{v} \\ &\iff \exists(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 \begin{cases} x = x_A + \lambda_1 x_u + \lambda_2 x_v \\ y = y_A + \lambda_1 y_u + \lambda_2 y_v \\ z = z_A + \lambda_1 z_u + \lambda_2 z_v \end{cases} \end{aligned}$$

VI — Vecteur normal, projection orthogonale

Théorème 6.1 — Vecteur normal à une droite, à un plan

Soit A un point du plan ou de l'espace et $\overrightarrow{n}$ un vecteur non nul. L'ensemble des points M tels que AM est orthogonal à n est

- ***Dans le plan :*** *une droite passant par A et dirigée par le vecteur $(-b, a)$.*
- ***Dans l'espace :*** *un plan passant par A et dirigé par deux vecteurs $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ orthogonaux à n et formant une famille libre.*

Définition 6.2 — Projection orthogonale sur une droite ou un plan

Soit A un point du plan ou de l'espace et Π une droite ou un plan.

*On appelle **projeté orthogonale de A sur Π** le point d'intersection de Π et de la droite passant par A et dirigée par un vecteur normale à Π.*

Propriété 6.3

Soit A un point du plan ou de l'espace, Π une droite ou un plan et H le projeté orthogonale de A sur Π.

- *Le vecteur $\overrightarrow{AH}$ est orthogonal à tous les vecteurs inclus dans Π.*
- *La distance AH est la plus petite distance entre A et un point quelconque de Π. On l'appelle **distance entre A et Π**.*