# Limites

BCPST 1 — 2022/2023

## Définition de la limite

**Exercice 1**

Calculer la limite en $x_0$ des expressions suivantes :

1. $\dfrac{x}{|x|}$ en $0$ ;
2. $\lfloor x+2\rfloor+\sqrt{x-\lfloor x\rfloor}$ en $1$ ;
3. $\sqrt{\dfrac{x-1}{x}}$ en $0$ ;
4. $\dfrac{x^2}{x-\mathrm{e}^{1/x}}$ en $0$ ;
5. $2^{1/x}$ en $0$ ;
6. $\dfrac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt{1+x}}{x}$ en $0$.

**Exercice 2**

1. Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x)=\dfrac{\lfloor x\rfloor}{x}$.
   La fonction $f$ a-t-elle une limite en $+\infty$ ?
2. Donner un équivalent de $\lfloor x\rfloor$ en $+\infty$.

## Utilisation des limites

**Exercice 3**

Soit $f$ une fonction définie sur $\mathbb{R}$, périodique et admettant une limite finie en $+\infty$.

1. Montrer que cette limite vaut $f(0)$.
2. Montrer que cette limite vaut $f(14)$.
3. Montrer que $f$ est constante.

**Exercice 4**

Que peut-on dire de la limite d'une fonction polynôme en $+\infty$ ? Que peut-on dire d'une fonction polynôme bornée ? D'une fonction polynôme périodique ?

**Exercice 5**

Soit $f$ une fonction définie sur $\mathbb{R}$, admettant une limite finie en 0 et vérifiant

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad f(x)=f(x/2)$$

Montrer que

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad \forall n\in\mathbb{N},\qquad f(x)=f(x/2^n)$$

et en déduire que $f$ est constante sur $\mathbb{R}$.

## Calcul de limites

**Exercice 6**

Soit $a>0$. Domaine de définition et limites aux bornes des fonctions

$$x\mapsto x^a\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\quad x\mapsto(1+x^a)\ln x\quad x\mapsto(x-\ln x)^a\ln x$$

**Exercice 7**

Déterminer les limites des expressions suivantes.

1. Quand $x\to 0$ :
   A) $\dfrac{1}{x(x+1)}-\dfrac{1}{x}$ ;
   B) $\dfrac{\sqrt{x^2}}{x}$ ;
   C) $\dfrac{x^2}{\sqrt{1+x^2}-1}$ ;
2. Quand $x\to+\infty$ :
   A) $\sqrt{a+x}-\sqrt{x}$ ;
   B) $\dfrac{x-\sqrt{x^2+1}}{x^2-\sqrt{x^2+1}}$ ;

**Exercice 8**

*Même jeu.*

1. Quand $x\to 0$ :
   A) $\dfrac{\sin ax}{\sin bx}$ et $\dfrac{\tan ax}{\tan bx}$ ;
   B) $\dfrac{x^2}{\tan^2 x-2\sin^3 x}$ ;
2. quand $x\to\frac{\pi}{3}$ : $\dfrac{\sin 3x}{1-2\cos x}$ ;
3. quand $x\to+\infty$ : $x\sin\left(\dfrac{\pi}{x}\right)$.

**Exercice 9**

*Même jeu.*

1. quand $x\to+\infty$ :
   A) $\ln\left(3x^2-4\right)-\ln\left(x^2+1\right)$ ;
   B) $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$ ;
   C) $\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{3x-2}$ ;
   D) $\left(1+\dfrac{a}{x}\right)^{bx}$ ;
   E) $\left(\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-4x+2}\right)^x$ ;
2. quand $x\to 0$ :
   A) $(\ln(1+x))^{1/x}$ ;
   B) $\dfrac{\ln\left(1+x+x^2\right)}{x^2}$.

**Exercice 10**

Étudier les limites des fonctions suivantes :

1. $x\mapsto\dfrac{x^3+2x-5}{5x^3-x^2-1}$ en $+\infty$ ;
2. $x\mapsto\dfrac{\mathrm{e}^{3x}+2x+7}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}$ en $+\infty$ ;
3. $\dfrac{\sin(2x)}{\sqrt{1-\cos x}}$ en $0$ ;

4. $x \mapsto \sqrt{x^2+x+1} - x$ en $+\infty$ ;
5. $x \mapsto \sin x \times \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ en $0$ ;
6. $x \mapsto \dfrac{x \sin x}{x^2+1}$ en $+\infty$ ;
7. $x \mapsto \dfrac{\sin(x \ln x)}{x}$ en $0$.

**Exercice 11**

Trouver un équivalent simple des expressions suivantes

1. $\dfrac{x^4 - x^3 + 8x^2 - 1}{x^2 + 4x + 7}$ en $-\infty$ ;
2. $\ln(1+x^2) + \sin^2 x$ en $\infty$ ;
3. $\dfrac{\ln(1+x^2) - \ln(1-2x^2)}{\ln(1+x^3) - \ln(1-x^3)}$ en $0$ ;
4. $\dfrac{\cos x - 1}{\sqrt{x}}$ en $0$ ;
5. $2 - \sqrt{4+x}$ en $0$ ;
6. $\ln x$ en $1$ ;
7. $\dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{x+2} + \dfrac{100}{x^3}$ en $0$ ;
8. $\ln(2x+1) - \ln(2x+7)$ en $+\infty$ ;
9. $\ln(e^{x^2+1} - x^2) + \ln(x^2-1)$ en $+\infty$.
10. ★ $\ln(\cos x) + e^{(\tan x)^2} - \sqrt{1+2x^3}$ en $0$ ;

**Exercice 12**

Il est toujours possible de se ramener au cas $x = 0$ par le changement de variable $h = x - x_0$, qui s'écrit aussi $x = x_0 + h$. Étudier l'existence d'une limite en $x_0$ pour les expressions suivantes :

1. $\dfrac{x^2 - 3x}{x - 1 - \sqrt{x+1}}$ $\quad x_0 = 3$ ;
2. $\dfrac{\sqrt{3}\cos x - \sin x}{x - \frac{\pi}{3}}$ $\quad x_0 = \pi/3$
3. $(x^2 + x - 2)\tan\left(\dfrac{\pi x}{2}\right)$ $\quad x_0 = 1$ ;

**Exercice 13** — *Un équivalent mais pas de limite*

Montrer que les deux fonctions définies par

$$f(x) = \frac{1}{x} \qquad \text{et} \qquad g(x) = \frac{1}{x^3 + x}$$

sont équivalentes en 0. Ont-elles une limite en 0 ?

## Sur la continuité

**Exercice 14**

Vrai ou faux ?

1. Si $f$ admet une limite à droite en tout point de $[0\,;1]$ alors $f$ est continue sur $[0\,;1]$.
2. Si $f$ est continue sur $[0\,;1]$ alors $f$ est bornée sur $[0\,;1]$.
3. Si $f$ est continue sur $]0\,;1]$ alors $f$ est bornée sur $]0\,;1]$
4. Si $f$ est continue sur $\mathbb{R}$ alors l'image d'un intervalle ouvert est un intervalle ouvert.
5. Si $f$ est continue sur $\mathbb{R}$ alors l'image d'un intervalle fermé est un intervalle fermé.
6. Si $f$ est continue sur $\mathbb{R}$ alors l'image d'une partie bornée est bornée.
7. Si $f$ est définie sur $[-2\,;2]$ et si la restriction de $f$ à $[-1\,;1]$ est continue alors $f$ est continue sur $[-1\,;1]$.

## Étude de continuité

**Exercice 15**

Étudier la continuité de

1. $f_1 : \begin{array}{|l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$
2. $f_2 : \begin{array}{|l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \begin{cases} 1 - e^{-x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$
3. $f_3 : \begin{array}{|l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \begin{cases} \dfrac{e^x - 1}{x} & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \\ \sqrt{x}\ln(x) & \text{si } x > 0 \end{cases} \end{array}$
4. $f_4 : \begin{array}{|l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \begin{cases} \dfrac{5x^2 + 4x}{1 + x^2} & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x > 0 \end{cases} \end{array}$

**Exercice 16**

Est-il possible de prolonger la fonction $f$ par continuité en $x_0$ ?

1. $x_0 = 1, \quad f(x) = \ln\left(\sqrt{x} - 1\right) - \ln(x-1)$ ;
2. $x_0 = 0, \quad f(x) = x \ln\left(\dfrac{x^2 - 1}{x}\right)$ ;
3. $x_0 = \pi/2, \quad f(x) = \dfrac{1}{\tan x}$ ;
4. $x_0 = 0, \quad f(x) = \cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$ ;
5. $x_0 = 0, \quad f(x) = x^2 \cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$ ;
6. $x_0 = 1/2, \quad f(x) = \dfrac{6x^2 + 5x - 4}{2x - 1}$.

**Exercice 17**

Étudier le prolongement par continuité des fonctions suivantes en un ou plusieurs points à préciser.

1. $f_1 : x \mapsto \dfrac{1}{1-x} - \dfrac{3}{1-x^3}$ ;
2. $f_2 : x \mapsto \dfrac{x^2-2x-3}{\sqrt{x+1}}$ ;
3. $f_3 : x \mapsto \dfrac{\sin x}{\sqrt{1+x}-1}$.

**Exercice 18**

Étudier la continuité de la fonction

$$x \longmapsto \lfloor x \rfloor^2 - x\lfloor x \rfloor + x^2$$

**Exercice 19**

Pour tout $x > 0$ on pose : $f(x) = (\mathrm{e}^x + 2x)^{1/x}$. Étudier un éventuel prolongement par continuité de $f$.

**Exercice 20**

Peut-on prolonger en 0 les fonction suivantes ?

1. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}$
2. $g(x) = \dfrac{x^x}{2x+|x|}$
3. $h(x) = x^x$.

**Exercice 21**

Soit $f$ la fonction définie par :

$$f(x) = \left(\frac{x}{x-1}\right)^{x-1} - \left(\frac{x+1}{x}\right)^{x+1}$$

1. Préciser l'ensemble de définition de $f$ et étudier la continuité de $f$.
2. Montrer que $f$ est impaire.
3. Montrer que $f$ admet un prolongement par continuité en 1 et $-1$.
4. Étudier la limite de $f$ en $+\infty$.

**Exercice 22**

Étudier la continuité de

$$f : x \mapsto (x^2-1)\sin\left(\frac{1}{x-1}\right)$$

**Exercice 23**

Même exercice avec

$$f : x \mapsto \cos(\ln|x|)\ln(1+x)$$

**Exercice 24**

Même exercice avec $f : x \mapsto \lfloor x \rfloor \sin \pi x$.

## Théorème des valeurs intermédiaires, bijection continue

**Exercice 25**

Montrer que $x^2\cos x + x\sin x + 1 = 0$ admet au moins une solution sur $\mathbb{R}$.

**Exercice 26**

1. Montrer que l'équation
$$\frac{1}{x+1}\cos(x) - x^2 + 1 = 0$$
admet une unique solution dans l'intervalle $[\,0\,;\,\pi/2\,]$.
2. Proposer des programmes écrits en Python pour trouver un encadrement de cette racine à une précision donnée. Comparer les différentes méthodes en terme de nombre d'opérations nécessaires.

**Exercice 27**

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}$$

1. Justifier la continuité de $f$ sur $\mathbb{R}$ et montrer que $f$ est une fonction impaire.
2. Montrer que $f$ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle $I$ que l'on précisera.
3. Donner sans calcul les propriétés de $f^{-1}$ et dresser son tableau de variation. Montrer que $f^{-1}$ est impaire.
4. Déterminer, pour tout $y \in I$, une expression de $f^{-1}(y)$.

**Exercice 28**

On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$f(x) = x^2 - x\ln x - 1$$

1. Démontrer que $f$ est correctement définie, continue et indéfiniment dérivable sur son domaine de définition.
2. Calculer les deux premières dérivées de $f$ et dresser son tableau de variation.
3. Montrer que $f$ réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur un intervalle $I$ à préciser. On note $g$ la bijection réciproque de $f$.
4. Dresser le tableau de variation de $g$.
5. a) Déterminer un équivalent de $f$ en $+\infty$.

B) En déduire que $\lim_{t\to+\infty} \dfrac{f(g(t))}{g(t)^2} = 1$, puis déterminer un équivalent de $g$ en $+\infty$.

**Exercice 29**

Soit $f$ une fonction continue et strictement positive sur $\mathbb{R}_+$. On suppose que $\lim_{x\to+\infty} f(x)/x$ existe est strictement inférieure à 1. Montrer qu'il existe un réel $x_0$ tel que $f(x_0) = x_0$.

**Exercice 30**

Déterminer suivant la valeur du réel $\lambda$, le nombre de solutions de l'équation d'inconnue réelle $x$

$$(E_\lambda): \qquad \mathrm{e}^{\lambda x} = x$$

**Exercice 31**

Soit $f$ une fonction continue sur $[0\,;1]$, à valeurs dans $[0\,;1]$.

1. Montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \exists a_n \in [0\,;1], \quad f(a_n) = a_n^n.$$
2. On suppose $f$ strictement décroissante. Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n$ est unique.

**Exercice 32**

Soit $P$ une fonction polynôme à coefficients réels et de degré impair.

1. Déterminer $P\langle\mathbb{R}\rangle$.
2. En déduire que $P$ admet au moins une racine réelle.

**Exercice 33** — *Le théorème « des cordes »*

Soit $f$ une fonction continue sur $[0\,;T]$.
Démontrer qu'il existe $a \in [0\,;T/2]$ tel que le taux d'accroissement de $f$ entre $a$ et $a+T/2$ soit le même que celui entre 0 et $T$.

**Exercice 34**

1. Soit $f$ une fonction continue sur un intervalle $[a\,;b]$. On suppose que $f\langle[a\,;b]\rangle \subset [a\,;b]$. Montrer qu'il existe un réel $x \in [a\,;b]$ tel que $f(x) = x$.
2. Soit $f$ une fonction continue sur $[0\,;1]$ et telle que $f(0) = f(1)$. Montrer que l'équation $f\left(x+\dfrac{1}{2}\right) = f(x)$ admet une solution.
3. Un cycliste parcours 20 km en 1 heure. Montrer qu'il existe un intervalle de temps de 30 minutes pendant lequel il parcours exactement 10 km.

## Utilisation de la continuité

**Exercice 35**

Soit $f$ une fonction numérique continue sur un intervalle $I$ non vide.

1. Montrer que si $f$ ne prend qu'un nombre fini de valeurs, alors elle est constante sur $I$.
2. Montrer que si $|f|$ est constante sur $I$, alors elle est constante sur $I$.
3. Montrer que si $f^2$ est constante alors $f$ est constante.
4. Montrer que si $f$ ne prend que des valeurs entières, alors elle est constante sur $I$.

**Exercice 36**

Soit $f$ une fonction sur $\mathbb{R}$, telle que

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = l \in \mathbb{R} \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = l' \in \mathbb{R}$$

1. Donner un exemple d'une telle fonction qui n'est pas bornée sur $\mathbb{R}$.
2. On suppose de plus que $f$ est continue sur $\mathbb{R}$. Démontrer qu'elle est bornée.

**Exercice 37**

Soit $f$ une fonction continue et $T$–périodique sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que
$$\forall x \in \mathbb{R}, \ \exists y \in [0\,;T], \quad f(x) = f(y)$$
2. En déduire que $f$ est bornée sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que si $f$ est monotone alors $f$ est constante.

## Divers

**Exercice 38**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $f_n \ : \left|\begin{array}{lcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^5 + nx - 1 \end{array}\right.$.

1. Montrer que
$$\exists! x_n \in \mathbb{R}, \qquad f_n(x_n) = 0$$
Donner un encadrement de $x_n$ d'amplitude 1.
2. La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge-t-elle ?
3. En donner un équivalent.