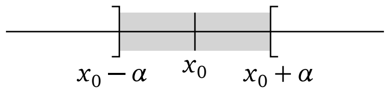
Limites d'une fonction — Continuité

bcpst 1 — 2022/2023

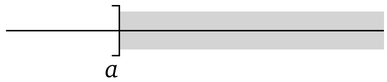
I — Parties de $\mathbb{R}$ et ordre

Définition 1.1 — Voisinage

*Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Un **voisinage de x_0** est un intervalle ouvert de la forme $]x_0 - \alpha\,;\, x_0 + \alpha[$ avec $\alpha > 0$.*



*Un **voisinage de $+\infty$** est un intervalle ouvert de la forme $]a\,;\, +\infty[$ avec $a \in \mathbb{R}$.*



II — Limites d'une fonction en un point

Notation À partir de maintenant, et sauf mention contraire :

1. I est un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point ;
2. $\mathscr{D}$ est une union finie d'intervalles de ce type.

Définition 2.1 — Limite finie en un point

Soit f est une fonction de $\mathscr{D}$ dans $\mathbb{R}$, x_0 un point ou une borne finie de $\mathscr{D}$ et $\ell \in \mathbb{R}$.
*La fonction **f tend vers ℓ** en x_0 si et seulement si*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \alpha > 0, \qquad \forall x \in \mathscr{D} \cap\,]x_0 - \alpha\,;\, x_0 + \alpha[\,, \qquad |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

Proposition 2.2 — Unicité de la limite

Soit f est une fonction de $\mathscr{D}$ dans $\mathbb{R}$ et x_0 un point ou une borne finie de $\mathscr{D}$.
Si f tend vers ℓ en x_0, alors il existe un seul réel ℓ vérifiant cette propriété.

Théorème & Définition 2.3 — Continuité ponctuelle

Soit f est une fonction de $\mathscr{D}$ dans $\mathbb{R}$ et x_0 un point de $\mathscr{D}$.
*La fonction **f est continue en x_0** si et seulement si elle admet une limite finie en x_0.*
Dans ce cas, cette limite est nécessairement égale à $f(x_0)$.

Définition 2.4 — Limites infinies en un point

Soit $f : \mathscr{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ et x_0 un point ou une borne finie de $\mathscr{D}$.
*La fonction **f tend vers $+\infty$ en x_0** si et seulement si*

$$\forall M > 0, \quad \exists \alpha > 0, \qquad \forall x \in \mathscr{D} \cap\,]x_0 - \alpha\,;\, x_0 + \alpha[\,, \quad f(x) > M.$$

*La fonction **f tend vers $-\infty$ en x_0** si et seulement si $-f$ tend vers $+\infty$.*

DÉFINITION 2.5 — **Limite finie en $+\infty$**

On suppose que $\mathscr{D}$ contient un voisinage de $+\infty$. Soit $f : \mathscr{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $\ell \in \mathbb{R}$.

*La fonction **f tend vers $\ell \in \mathbb{R}$ en $+\infty$** si et seulement si*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists A > 0, \qquad x \in \mathscr{D} \cap]A\,;\,+\infty[\implies |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

On définit de même les limites en $-\infty$.

On prouve qu'il y a également unicité de la limite finie en $+\infty$ ou en $-\infty$.

DÉFINITION 2.6 — **Limite infinie en $+\infty$**

On suppose que $\mathscr{D}$ contient un voisinage de $+\infty$. Soit $f : \mathscr{D} \longrightarrow \mathbb{R}$.

*La fonction **f tend vers $+\infty$ en $+\infty$** si et seulement si*

$$\forall M > 0, \quad \exists A > 0, \qquad x \in \mathscr{D} \cap]A\,;\,+\infty[\implies f(x) > M.$$

DÉFINITION 2.7 — **Limites par valeurs supérieures, inférieures**

Soit $f : \mathscr{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ et x_0 un point ou une borne finie ou infinie de $\mathscr{D}$.

*La fonction **f tend vers ℓ par valeurs supérieures en x_0** si et seulement si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$ et si $f(x) \geqslant \ell$ sur un voisinage de x_0. On note $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell^+$ ou bien $f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} \ell^+$.*

*La fonction **f tend vers ℓ par valeurs inférieures quand x tend vers x_0** si et seulement si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$ et si $f(x) \leqslant \ell$ sur un voisinage de x_0. On note $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell^-$ ou bien $f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} \ell^-$.*

DÉFINITION 2.8 — **Limite et continuité à gauche en x_0**

Soit $f : \mathscr{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ et x_0 un point de $\mathscr{D}$ ou une borne supérieure finie de $\mathscr{D}$.

*La fonction f admet une **limite à gauche en x_0** si et seulement si la restriction de f à $\mathscr{D} \cap]-\infty\,;\,x_0[$ admet une limite en x_0. Cette limite est notée $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x)$ ou $f(x) \xrightarrow[\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}]{} \ell$.*

*La fonction f est **continue à gauche en x_0** si et seulement si elle admet une limite à gauche en x_0 et si, de plus, $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = f(x_0)$.*

DÉFINITION 2.9 — **Limite et continuité à droite en x_0**

Soit $f : \mathscr{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ et x_0 un point de $\mathscr{D}$ ou une borne inférieure finie de $\mathscr{D}$.

*La fonction f admet une **limite à droite en x_0** si et seulement si la restriction de f à $\mathscr{D} \cap]x_0\,;\,+\infty[$ admet une limite en x_0. Cette limite est notée $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x)$ ou $f(x) \xrightarrow[\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}]{} \ell$.*

*La fonction f est **continue à droite en x_0** si et seulement si elle admet une limite à droite en x_0 et si, de plus, $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) = f(x_0)$.*

Ces limites peuvent être finies ou infinies.

Important ! Aux bornes de $\mathscr{D}$, il est sous-entendu qu'on prend la limite à gauche ou à droite, selon les cas.

Proposition 2.10 — **Lien entre limite, limites à gauche et à droite**
Soit x_0 un point ou une borne de $\mathscr{D}$ et $f : \mathscr{D} \setminus \{x_0\} \longrightarrow \mathbb{R}$.
La fonction f admet une limite en x_0 si et seulement si elle admet une limite à gauche et une limite à droite en x_0 et que

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} f(x) = \lim_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} f(x) \quad \textit{auquel cas} \quad \lim_{x\to x_0} f(x_0) = \lim_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} f(x)$$

Ces limites peuvent être finie ou infinie.

Proposition 2.11 — **Lien entre continuité, limites à gauche et à droite**
Soit $f : \mathscr{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ et x_0 un point à l'intérieur de $\mathscr{D}$.
La fonction f est continue en x_0 si et seulement si elle admet une limite à gauche et à droite en x_0 et que

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} f(x) = \lim_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} f(x) = f(x_0)$$

Théorème & Définition 2.12 — **Prolongement par continuité**
Soit x_0 un point de $\mathscr{D}$ et $f : \mathscr{D} \setminus \{x_0\} \longrightarrow \mathbb{R}$.
Si f admet une limite finie en x_0, alors il existe un unique prolongement $\tilde{f}$ de f à $\mathscr{D}$ tel que $\tilde{f}$ soit continue en x_0.
*On parle du **prolongement par continuité** de f en x_0.*

III — Opérations sur les limites

Théorème 3.1 — **Opérations algébriques – Limites finies**
Soit $f : \mathscr{D} \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : \mathscr{D} \longrightarrow \mathbb{R}$, x_0 un point ou une borne fnie ou infinie de $\mathscr{D}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
On suppose que $f(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} \ell$ et que $g(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} \ell'$, avec ℓ et ℓ' deux réels.

$$f(x) + g(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} \ell + \ell' \qquad f(x) \times g(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} \ell \times \ell'$$

$$\lambda f(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} \lambda\ell \qquad \frac{1}{f(x)} \xrightarrow[x\to x_0]{} \frac{1}{\ell} \qquad \textit{si } \ell \neq 0$$

Ce théorème est également valable pour des limites à gauche et à droite.

Corollaire 3.2 — **Opérations algébriques et continuité ponctuelle**
Soit $f : \mathscr{D} \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : \mathscr{D} \longrightarrow \mathbb{R}$, x_0 un point de $\mathscr{D}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
Si f et g sont continues en x_0 alors λf, $f+g$ et $f \times g$ sont continues en x_0.
Si, de plus, $f(x_0) \neq 0$ alors $1/f$ est continue en x_0.

Théorème 3.3 — **Opérations algébriques – Limites infinies**

Soit $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ *et* x_0 *un point ou une borne éventuellement infinie de* $\mathcal{D}$.

1. *Si* $f(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} +\infty$ *alors* $\dfrac{1}{f(x)} \xrightarrow[x\to x_0]{} 0$ *et* $-f(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} -\infty$;
2. *si* $f(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} 0^+$ *alors* $\dfrac{1}{f(x)} \xrightarrow[x\to x_0]{} +\infty$;
3. *si* $f(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} \ell$ *et* $g(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} +\infty$ *alors* $f(x)+g(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} +\infty$;
4. *si* $f(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} \ell > 0$ *et* $g(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} +\infty$ *alors* $f(x)\times g(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} +\infty$
5. *Si* $f(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} +\infty$ *et* $g(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} +\infty$ *alors* $f(x)+g(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} +\infty$
   et $f(x)\times g(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} +\infty$.

En modifiant le signe de f et/ou de g, on traite le cas des limites $-\infty$, etc.

Tous les autres cas relèvent de ce qu'on appelle les « formes indéterminées ».

$$\text{« } \infty - \infty \text{ »} \qquad \text{« } 1^{\infty} \text{ ».}$$

$$\text{« } \frac{0}{0} \text{ »} \quad = \quad \text{« } \infty \times 0 \text{ »} \quad = \quad \text{« } \frac{\infty}{\infty} \text{ »}$$

Théorème 3.4 — **Composée**

Soit $f : \mathcal{D}_f \longrightarrow \mathbb{R}$ *et* $g : \mathcal{D}_g \longrightarrow \mathbb{R}$ *deux fonctions numériques et* x_0 *un point ou une borne éventuellement infinie de* $\mathcal{D}_f$,

On suppose que f *admet une limite (finie ou infinie)* ℓ *en* x_0 , *que* ℓ *est un point ou une borne éventuellement infinie de* $\mathcal{D}_g$ *et que* g *admet une limite* ℓ' *en* ℓ.

Dans ce cas $g(f(x)) \xrightarrow[x\to x_0]{} \ell'$.

Corollaire 3.5 — **Continuité d'une composée**

Soit $f : \mathcal{D}_f \longrightarrow \mathbb{R}$ *et* $g : \mathcal{D}_g \longrightarrow \mathbb{R}$ *et* x_0 *un point de* $\mathcal{D}_f$.

On suppose que f *est continue en* x_0 , *que* $f(x_0) \in \mathcal{D}_g$ *et que* g *est continue en* $f(x_0)$. *Alors* $g\circ f$ *est continue en* x_0.

Théorème 3.6 — **Limite de la composée d'une fonction et d'une suite**

Soit $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ *et* x_0 *un point de* $\mathcal{D}$ *ou une borne finie ou infinie de* $\mathcal{D}$ *tels que* f *tend vers* ℓ *en* x_0.

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{D}^{\mathbb{N}}$ *est une suite telle que* $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x_0$ *alors* $f(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.

IV — Limites et ordre

Proposition 4.1
Si f admet une limite non nulle en x_0 alors f est non nulle sur un voisinage de x_0.

Proposition 4.2
Soit $f : \mathscr{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ et x_0 un point ou une borne finie ou infinie de $\mathscr{D}$. On suppose que $\forall x \in \mathscr{D},\ f(x) > a$ et que f admet une limite ℓ en x_0. Alors $\ell \geqslant a$.

Corollaire 4.3
Soit x_0 un point ou une borne finie ou infinie de $\mathscr{D}$ et $f : \mathscr{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathscr{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ admettant toutes deux une limite en x_0.
Si $\forall x \in \mathscr{D},\ f(x) < g(x)$ alors $\lim\limits_{x_0} f \leqslant \lim\limits_{x_0} g$.

Théorème 4.4 — **Théorème d'encadrement**
Soit f, u et v trois fonctions définies sur $\mathscr{D}$ et x_0 un point ou une borne finie ou infinie de $\mathscr{D}$.

Si	$\forall x \in \mathscr{D} \setminus \{x_0\},\quad u(x) \leqslant f(x) \leqslant v(x)$
si	*u et v admettent une limite en x_0*
et si	$\lim\limits_{x_0} u = \lim\limits_{x_0} v$
alors	*f admet une limite en x_0*
et	$\lim\limits_{x_0} f = \lim\limits_{x_0} u = \lim\limits_{x_0} v$

Théorème 4.5 — **Théorème de minoration/majoration**
Soit x_0 un point de $\mathscr{D}$, ou une borne finie ou infinie de $\mathscr{D}$. Soit f et g deux fonctions définies sur $\mathscr{D}$ telles que

$$\forall x \in \mathscr{D} \setminus \{x_0\},\qquad f(x) \leqslant g(x)$$

$$\begin{array}{llll} \text{Si} & \lim\limits_{x_0} f = +\infty & \text{alors} & \lim\limits_{x_0} g = +\infty. \\ \text{Si} & \lim\limits_{x_0} g = -\infty & \text{alors} & \lim\limits_{x_0} f = -\infty. \end{array}$$

Théorème 4.6 — **Théorème de la limite monotone**
Soit f est une fonction monotone sur un intervalle $]\,a\,;\,b\,[$, avec éventuellement a et b infinis.
Alors f admet une limite (finie ou infinie) en a et en b.

V — Continuité sur un intervalle

Définition 5.1 — Fonction continue sur un ensemble
Soit $f : \mathscr{D} \longrightarrow \mathbb{R}$.
*On dit que **f est continue** $\mathscr{D}$ si et seulement si f est continue en tout point de $\mathscr{D}$.*

À l'exception de $x \mapsto \lfloor x \rfloor$, les fonctions usuelles sont toutes continues sur leurs domaines de définition.

Théorème 5.2 — Opérations algébriques
Soient f et g sont deux fonctions continues sur un domaine $\mathscr{D}$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.
Les fonctions $\lambda f + \mu g$ et $f \times g$ sont continues sur $\mathscr{D}$.
Si, de plus, g ne s'annule en aucun point de $\mathscr{D}$ alors $\dfrac{f}{g}$ est continue sur $\mathscr{D}$.

Théorème 5.3 — Composition
Soient $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ deux domaines de $\mathbb{R}$, $f : \mathscr{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathscr{D}' \longrightarrow \mathbb{R}$.
Si f est continue sur $\mathscr{D}$, si $f\langle \mathscr{D} \rangle \subset \mathscr{D}'$ et si g est continue sur $\mathscr{D}'$, alors $g \circ f$ est continue sur $\mathscr{D}$.

Théorème 5.4 — Composition avec une suite
Soit $f : \mathscr{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue, et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels à valeurs dans $\mathscr{D}$. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$ avec $a \in \mathscr{D}$, alors $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et de limite $f(a)$.

VI — Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème 6.1 — Théorème des valeurs intermédiaires (I)
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant au moins deux points, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur I, a et b deux points distincts de I tels que $f(a)f(b) \leqslant 0$
Il existe un point c entre a et b tel que $f(c) = 0$.

Corollaire 6.2 — Théorème des valeurs intermédiaires (II)
Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur I, où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant au moins deux points. Soit a et b dans I et γ un réel entre $f(a)$ et $f(b)$.
Il existe un point c entre a et b tel que $f(c) = \gamma$.

Corollaire 6.3 — Théorème des valeurs intermédiaires (III)
Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur I, où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant au moins deux points.
Alors $f\langle I \rangle$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.

En pratique, cet intervalle se lit directement sur le tableau de variations.

Théorème 6.4 — **Théorème des bornes atteintes**
Soit I est un segment *de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$.*
Alors $f\langle I\rangle$ est aussi un segment de $\mathbb{R}$.

Corollaire 6.5
Une fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes.

VII — Théorème de la bijection continue

Théorème 7.1 — **Bijection continue**
Soit I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une application strictement monotone.

1. *La fonction f réalise une bijection de I sur $f\langle I\rangle$.*
2. *La bijection réciproque f^{-1}, définie sur $f\langle I\rangle$, est strictement monotone, et de même monotonie que f.*
3. *Si, de plus, f est continue, alors f^{-1} est continue sur l'intervalle $f\langle I\rangle$.*

Proposition 7.2
Soit $f : I \longrightarrow J$ une fonction bijective définie sur un intervalle I, à valeurs dans un intervalle J.
Le graphe de la bijection réciproque f^{-1} est symétrique de celui de f par rapport à la première bissectrice.

Corollaire 7.3 — « **Corollaire du théorème des valeurs intermédiaires** »
Soit I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et strictement monotone sur I, a et b deux points de$I$.
Si $f(a)\,f(b) < 0$ alors il existe un unique point c entre a et b tel que $f(c) = 0$.

DÉFINITION 8.1
On dit que f et g sont ***équivalentes*** *au voisinage de x_0 si et seulement si $f(x)/g(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} 1$.*
Dans ces conditions, on note « $f \sim g$ au voisinage de x_0 », ou bien $f \underset{x_0}{\sim} g$ ou plus simplement (lorsque le contexte est clair) $f \sim g$.

PROPOSITION 8.2 — **Calcul avec des équivalents**
Au voisinage d'un point x_0 :

1) *si $f \sim g$ et si $g \sim h$ alors $f \sim h$;*
2) *si $f_1 \sim g_1$ et si $f_2 \sim g_2$ alors $f_1 f_2 \sim g_1 g_2$;*
3) *si $f \sim g$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ alors $f^\alpha \sim g^\alpha$* (sous réserve d'existence)*;*
4) *si $f \sim g$ et si g est de signe constant au voisinage de x_0 alors f et g sont de même signe au voisinage de x_0.*

PROPOSITION 8.3
Si $f \sim g$ et si $g(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} \ell$ alors $f(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} \ell$ (la limite ℓ peut être infinie).

Attention ! La réciproque est fausse ! Par exemple e^x et x ont la même limite en $+\infty$ mais ne sont pas équivalentes.

THÉORÈME 8.4 — **Approximation affine d'une fonction**
Si f est dérivable en a et si $f'(a) \neq 0$, alors

$$f(x) - f(a) \sim f'(a)(x-a) \quad \Longleftrightarrow \quad f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + o(x-a)$$

On en tire les équivalents classiques :

$$\begin{array}{ccc}
\sin x \underset{x\to 0}{\sim} x & \tan x \underset{x\to 0}{\sim} x & \cos(x) - 1 \underset{x\to 0}{\sim} -\dfrac{x^2}{2} \\
\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x & e^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x & (1+x)^\alpha - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \alpha x
\end{array}$$