Logique

bcpst 1 — 2021/2022

Formalisme logique

Exercice 1

1. Traduire sous forme logique l'affirmation « Mange–ta soupe ou tu seras privé de télévision. »
2. Traduire sous forme logique l'affirmation « Tu prendras du gâteau ou de la glace ? »

Exercice 2

Soit P, Q et R trois propositions. Donner la négation de

1. P ou (Q et R)
2. P et (Q ou R)
3. $P \implies$ non Q
4. non (P ou Q) $\implies R$
5. P et $Q \implies$ non R
6. P et (non Q ou R)
7. (P et Q) $\implies R$

Exercice 3

Traduire ces termes de logique stoïcienne [1] à l'aide du formalise moderne.

1. Proposition conditionnelle (SI) « S'il fait jour, il fait clair »
2. Proposition subconditionnelle (PUISQUE) « Puisqu'il fait jour, il fait clair »
3. Proposition conjonctive (ET) « Il fait jour et il fait clair »
4. Proposition disjonctive (OU) « Ou il fait jour, ou il fait nuit »

Exercice 4

1. Quelle est la valeur de vérité des propositions suivantes ?
   a) 2 est pair $\implies$ 4 est pair ;
   b) 2 est pair $\implies$ 3 est pair ;
   c) 2 est impair $\implies$ 3 est pair
   d) $4 > 1 \iff 4^2 > 1$;
   e) le ciel est bleu $\iff 2+2=4$.
2. À partir des propositions précédentes, pouvez-vous rédiger un raisonnement prouvant que que 3 est pair ? Que $16 > 1$? Justifier.

1. Le *stoïcisme* est une école philosophique de la Grèce antique, fondée par Zénon de Citium en 301 av. J.-C. Son système philosophique est divisé en trois parties : la logique, la physique et la morale.

Raisonnements

Exercice 5

1. Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que
$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \qquad 0 \leqslant x \leqslant \varepsilon$$
Montrer que $x = 0$ (par exemple par l'absurde).
2. La propriété précédente est-elle vraie en remplaçant $\mathbb{R}$ par $\mathbb{Z}$? Et en remplaçant $\mathbb{R}$ par $\mathbb{Q}$?

Exercice 6

Montrer que l'ensemble
$F = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } y = x-1\right\}$ est inclus dans l'ensemble
$E = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } (-x+2y+4)(3x-y+3) \geqslant 0\right\}$.
Est-ce que $E = F$?

Exercice 7

En raisonnant par l'absurde, démontrer les résultats suivants.

1. Soit n un entier naturel non nul. On suppose que $4n+1$ objets sont rangés dans n tiroirs. Montrer que l'un des tiroirs contient au moins 5 objets.
2. Soit x et y deux nombres réels. Démontrer que $(x \neq 1 \text{ et } y \neq 1) \implies (xy + 1 - x - y \neq 0)$.

Exercice 8

Montrer que $\dfrac{\ln(2)}{\ln(3)}$ est irrationnel (c'est-à-dire qu'il ne peut s'écrire comme le quotient de deux entiers).

Exercice 9

Soit f une fonction dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Donner la réciproque et la contraposée des propositions suivantes. Dans chaque cas, donner la valeur de vérité.

1. f est constante $\implies f$ est croissante ;
2. f' est positive $\implies f$ est croissante ;
3. $f' = 0 \implies f$ est constante ;
4. $f'(1) = 0 \implies f$ admet un extremum en 1.

Exercice 10 — *Contraposée*

Énoncer les contraposées des propositions suivantes

1. Si je suis à Bordeaux, alors on est lundi.
2. Ceux qui parlent ne savent pas.
3. Si le dernier chiffre d'un nombre n est 2, 3, 7 ou 8, alors n n'est pas le carré d'un entier.

Exercice 11 — *Contraposée*

Énoncer les contraposées des propositions suivantes. Les démontrer ensuite. Étudier leurs réciproque.

1. $x^3 = 2 \implies x < 2$.
2. Soit A et B deux réels :

$$(\forall \varepsilon > 0, \qquad A < B + \varepsilon) \implies A \leqslant B$$

Exercice 12 — *Analyse-synthèse*

En raisonnant par analyse-synthèse, résoudre l'équation $x = \sqrt{x+2}$ d'inconnue réelle x.

Exercice 13 — *Analyse-synthèse*

Trouver toutes les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, dérivables, telles que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \qquad f(y - f(x)) = 2 - x - y$$

Exercice 14 — *Analyse-synthèse*

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Démontrer que f est la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

Quantificateurs

Exercice 15

Traduire avec des quantificateurs les assertions suivantes et préciser si elles sont vraies ou fausses.

1. Tout rationnel peut s'écrire sous la forme d'un quotient de deux entiers impairs.
2. Il existe un nombre réel dont la valeur absolue est inférieure à la valeur absolue de tous les autres nombres réels.
3. Il existe un entier plus petit que tous les autres entiers.
4. Il existe un entier naturel qui est plus petit que tous les autres.
5. Il existe des réels qui ne sont pas quotient de deux entiers relatifs.
6. Tous les réels possèdent un inverse dans $\mathbb{R}$.
7. Tout sous-ensemble de $\mathbb{N}$ possède un plus grand élément.

Exercice 16

Donner la négation des phrases suivantes

1. Toutes les boules contenues dans l'urne sont rouges ;
2. Certaines nombres entiers sont pairs
3. Si un nombre entier est divisible par 4, il se termine par 4.
4. Deux boules tirées portent le même numéro.
5. Il n'y a que deux boules tirées qui portent le même numéro.

Exercice 17

Compléter, si c'est possible, par $\exists$ ou $\forall$ pour que les énoncés suivants soient vrais

1. $\ldots x \in \mathbb{R}, \quad (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$
2. $\ldots x \in \mathbb{R}, \quad (x+1)^2 = x^2 + 3x + 1$
3. $\ldots x \in \mathbb{R}, \quad x^2 + 3x + 2 = 0$
4. $\ldots x \in \mathbb{R}, \quad x^2 + 2x + 3 \neq 0$

Exercice 18

Dire si les propositions suivantes sont vraies, fausses, ou autre chose

1. $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \cap \mathbb{R}_-^*, \quad x = 0$;
2. $\exists x \in \mathbb{R}_-^* \cap \mathbb{N}, \quad x^2 > 0$;
3. $\forall x \in \mathbb{R}, \quad x^2 < 0 \implies x < 0$;
4. $\forall x \in \mathbb{C}, \quad x^2 < 0 \implies x < 0$.

Exercice 19

Les énoncés suivants sont-ils vrais ou faux ?

1. $\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \exists y \in \mathbb{R}_+, \qquad y^2 = x$;
2. $\exists y \in \mathbb{R}_+, \quad \forall x \in \mathbb{R}_+, \qquad y^2 = x$;
3. $\exists y \in \mathbb{R}_+, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \qquad xy = x$;

Exercice 20

Interpréter les phrases suivantes à l'aide de quantificateurs

1. Il existe des nombres réels différents qui ont le même carré.
2. tout nombre réel positif a une racine carrée ;
3. le nombre 3 n'est le sinus d'aucun nombre ;
4. Un nombre rationnel est caractérisé par son numérateur et son dénominateur.

Démonstration par récurrence

Exercice 21

1. Montrer que $1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + (2n+1) = (n+1)^2$ (somme des nombres impairs).
2. Montrer que $1^3 + 3^3 + 5^3 + \cdots + (2n-1)^3 = 2n^4 - n^2$ (somme des cubes des nombres impairs).

Exercice 22 — *Inégalité de Leibniz*

Soit a un réel positif. Démontrer par récurrence sur n que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad (1+a)^n \geqslant 1 + na$$

Exercice 23
Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad n^3 - n \quad \text{est divisible par} \quad 6$$

Exercice 24
Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$u_0 = 0, \quad u_1 = 2 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n$$

Démontrer que, pour tout entier naturel n, $u_n = n2^n$.

Exercice 25
Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$u_0 = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = 2\left[\sum_{k=0}^{n} \sqrt{u_k}\right] + \sqrt{u_n} + 1$$

1. Démontrer que la suite est correctement définie.
2. Prouver que, pour tout entier naturel n, $u_n = n^2$.

Exercice 26
On définit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = 2$, $u_1 = 5$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$.
Vérifier que $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 2^n + 3^n$.

Exercice 27
Montrer

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$$

Exercice 28
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par

$$u_0 = 0, \quad u_1 = 1/2 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = u_{n+1}^2 + u_n^2$$

1. Montrer que cette suite est positive.
2. Montrer qu'elle est croissante.

Exercice 29
On considère le prédicat défini sur $\mathbb{N}$

$$\mathscr{P}(n): \qquad 2^n > n^2$$

Pour quelles valeurs de n la propriété $\mathscr{P}(n)$ est-elle vraie ? Démontrez-le.

Exercice 30
On considère la suite réelle $(n_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$u_0 = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = 2\left(\sum_{k=0}^{n} \sqrt{u_k}\right) + \sqrt{u_n} + 1$$

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.
2. Faire une hypothèse sur l'expression de u_n en fonction de n et la démontrer.

Exercice 31
On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par

$$u_1 = 1 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad u_{n+1} = 1 + \frac{n}{u_n}$$

Montrer que $\sqrt{n} \leqslant u_n \leqslant \sqrt{n} + 1$ pour $n \geqslant 2$.

Pour s'entraîner

Exercice 32
Montrer que la somme d'un nombre rationnel et d'un nombre irrationnel est un nombre irrationnel.

Exercice 33
Soit α un nombre irrationnel strictement positif. Démontrer que $\sqrt{\alpha}$ est également irrationnel.

Exercice 34
Dessiner l'ensemble des points M de coordonnées (x, y) dans le plan, défini par

1. $|x| + |y| = 1$;
2. $xy\,(|x| + |y| - 1) = 0$;
3. $\left(x^2 - y^2\right)(|x| + |y| - 1) = 0$;
4. $\max(|x|, |y|) \leqslant 1$;
5. $\min(|x|, |y|) \leqslant 1$;
6. $|x| + |y| \neq 1 \implies xy = 0$.

Exercice 35
On se donne la propriété (P)

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ \forall y \in \mathbb{R}, \ \forall z \in \mathbb{R}, \quad (xy = yz) \Rightarrow (x = z)$$

(P) est-elle vraie ? Pourquoi ? Écrire sa négation.

Exercice 36
Soient x et y deux réels et n un entier naturel. Ecrire les contraposées des implications suivantes et les démontrer :

1. $xy \neq 0 \Rightarrow x \neq 0$ et $y \neq 0$.
2. n est premier $\Rightarrow n = 2$ ou n est impair.
3. $x \neq y \Rightarrow (x+1)(y-1) \neq (x-1)(y+1)$.

Exercice 37
Soient les sous-ensembles $A = \{1, 2\}$ et $B = \{1, 2, 4\}$ de $\mathbb{N}$, et $f \ : \left|\begin{array}{ccc} A \times B & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ (x, y) & \longmapsto & y^x \end{array}\right.$.
Pour $x \in A$ et $y \in B$, examiner la véracité des assertions suivantes (si elle est vraie, la démontrer, sinon, donner un contre-exemple).

1. Si $x+y=4$, alors $f(x,y)=4$.
2. Si $f(x,y)=1$, alors $x=y$.
3. Si $f(x,y)=8$, alors $x=2$.
4. Négation de 2.
5. Contraposée de 2.
6. Si $f(x,y)=1$ et $x\neq 2$, alors $y=1$.
7. Négation de 6.
8. Contraposée de 6.

Exercice 38

Pour chacune des propriétés suivantes, dire si elle est vraie ou non (justifier votre réponse), et écrire sa négation. Écrire la contraposée de (3) et (4).

1. $\exists a\in\mathbb{R},\ \forall x\in\mathbb{R},\ \exists b\in\mathbb{R}$ tels que $x=ab$.
2. $\forall x\in\mathbb{R},\ \forall y\in\mathbb{R},\ \exists a\in\mathbb{R}$ tels que $y=ax$.
3. $\forall x\in\mathbb{R},\ \forall y\in\mathbb{R},\ (xy\geqslant 4\Rightarrow(x\geqslant 2$ et $y\geqslant 2))$
4. $\forall x\in\mathbb{R},\ ((x^3-2x^2+x=0)\Rightarrow(x=0$ ou $x=1$ ou $x=2))$.

Exercice 39

Soient x et y deux nombres réels. Écrire la négation des propositions

$$\begin{array}{ll}(P) & 0<x\leqslant 1\\ (Q) & xy=0\\ (R) & x^2=1\Rightarrow x=1\end{array}$$

Exercice 40

Soit P la proposition

$$\exists x\in\mathbb{R},\quad \forall y\in\mathbb{R},\qquad (y<x)\Rightarrow(y<2x)$$

Écrire (non P). En déduire si la proposition P est vraie ou fausse.