Matrices

bcpst 1 — 2022/2023

Notation Dans tout ce chapitre, n et p sont deux entiers naturels non nuls. $\mathbb{K}$ désigne l'ensemble $\mathbb{R}$ ou l'ensemble $\mathbb{C}$.

I — Ensemble des matrices

Définition I.1 — Matrice à n lignes et p colonnes
*On appelle **matrice** à n lignes et p colonnes et à coefficients dans $\mathbb{K}$ la donnée de $n \times p$ éléments de $\mathbb{K}$ disposés dans un tableau sous la forme*

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1p} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n1} & m_{n2} & \cdots & m_{np} \end{pmatrix}$$

On note aussi $M = (m_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$. Dans la notation des coefficients m_{ij} de la matrice, l'indice i représente la ligne de la matrice et l'indice j la colonne de la matrice.

Vocabulaire

1. Une **matrice colonne** est une matrice qui n'a qu'une colonne ($p = 1$).
2. Une **matrice ligne** est une matrice qui n'a qu'une ligne ($n = 1$).
3. La **matrice nulle** O_{np} de $\mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})$ est la matrice dont tous les coefficients valent 0.
4. Une **matrice carrée** est une matrice qui a autant de ligne que de colonne ($n = p$). Ce nombre s'appelle l'**ordre** de la matrice. L'ensemble des matrices carrées d'ordre n est noté $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
5. Dans le cas des matrices carrées, les coefficients $(m_{ii})_{1 \leqslant i \leqslant n}$ forment la **diagonale** de la matrice.
6. Une matrice **triangulaire supérieure** est une matrice carrée dont les coefficients sous la diagonale sont tous nuls ($m_{ij} = 0$ si $i > j$).
   L'ensemble des matrices triangulaires supérieures d'ordre n est noté $\mathscr{T}_n^+(\mathbb{K})$.

$$\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & \cdots & m_{1n} \\ 0 & m_{22} & m_{23} & \cdots & m_{2n} \\ 0 & 0 & m_{33} & \cdots & m_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & m_{nn} \end{pmatrix}$$

7. Une matrice **triangulaire inférieure** est une matrice carrée dont les coefficients au dessus de la diagonale sont tous nuls ($m_{ij} = 0$ si $i < j$). L'ensemble des matrices triangulaires inférieures d'ordre n est noté $\mathscr{T}_n^-(\mathbb{K})$.

$$\begin{pmatrix} m_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ m_{21} & m_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n1} & m_{n2} & m_{n3} & \cdots & m_{nn} \end{pmatrix}$$

8. Les matrices dont les coefficients au-dessus et en dessous de la diagonale sont nuls sont les **matrices diagonales** ($m_{ij} = 0$ si $i \neq j$). L'ensemble des matrices diagonales d'ordre n est noté $\mathscr{D}_n(\mathbb{K})$.
$$\begin{pmatrix} m_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & m_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & m_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & m_{nn} \end{pmatrix}$$
9. On appelle **matrice identité** de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ la matrice
$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

II — Opérations sur les matrices

Définition 2.1 — **Transposée d'une matrice**

Soit $M = (m_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}} \in \mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})$*. On appelle* ***tranposée*** *de* M *et on note* M^T *la matrice de* $\mathscr{M}_{pn}(\mathbb{K})$ *égale à* $(m_{ji})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\ 1\leqslant j\leqslant n}}$

Définition 2.2 — **Matrice symétrique, antisymétrique**

Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$*. On dit que*

1. M *est* ***symétrique*** *si et seulement si* $M^T = M$*. L'ensemble des matrices symétriques est noté* $\mathscr{S}_n(\mathbb{K})$*.*
2. M *est* ***antisymétrique*** *si et seulement si* $M^T = -M$*. L'ensemble des matrices antisymétriques est noté* $\mathscr{A}_n(\mathbb{K})$*.*

Définition 2.3 — **Addition et produit par un scalaire**

Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ *et* $B = (b_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ *deux matrices de* $\mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})$ *et* $\lambda \in \mathbb{K}$*.*

1. *On appelle* ***produit*** *de* A *par* λ *et on note* $\lambda \,.\, A$ *la matrice* $C = (c_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ *définie par*
$$\forall i \in [\![1\,;n]\!], \quad \forall j \in [\![1\,;p]\!], \qquad c_{ij} = \lambda a_{ij}$$
2. *On appelle* ***somme*** *de* A *et de* B *et on note* $A+B$ *la matrice* $D = (d_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ *définie par*
$$\forall i \in [\![1\,;n]\!], \quad \forall j \in [\![1\,;p]\!], \qquad d_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

Propriété 2.4
L'addition de matrice est associative, commutative et possède un élément neutre (la matrice nulle O_{np}).

Propriété 2.5
Soit $(A,B) \in \mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})$ *et* $(\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2$

- $\lambda \,.\, (\mu \,.\, A) = (\lambda \times \mu) \,.\, A = \mu \,.\, (\lambda \,.\, A)$
- $\lambda \,.\, (A+B) = \lambda \,.\, A + \lambda \,.\, B$
- $(\lambda+\mu) \,.\, A = \lambda \,.\, A + \mu \,.\, A$

Propriété 2.6
Soit $(A,B) \in \mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})$ *et* $\lambda \in \mathbb{K}$

$$(A+B)^T = A^T + B^T \qquad et \qquad (\lambda \,.\, A)^T = \lambda \,.\, A^T$$

Définition 2.7 — **Produit d'une matrice ligne par une matrice colonne**
Soit $L \in \mathscr{M}_{1p}(\mathbb{K})$ *et* $C \in \mathscr{M}_{p1}(K)$*. Par définition, le produit* $L \times C$ *est la matrice de* $\mathscr{M}_1(\mathbb{K})$ *définie par*

$$LC = \left(l_{11}c_{11} + l_{12}c_{21} + \cdots + l_{1p}c_{p1}\right)$$

Définition 2.8 — **Produit de deux matrices**
Soit $q \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})$ *et* $B \in \mathscr{M}_{pq}(K)$*. Par définition, le produit* $A \times B$ *est la matrice de* $\mathscr{M}_{nq}(\mathbb{K})$ *dont le coefficient à la i–ième ligne et à la j–ième colonne est le produit de la i–ième ligne de A par la j–ième colonne de B.*

$$AB = \left(\sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant q}}$$

Propriété 2.9 — **Propriétés du produit matriciel**

$$\begin{array}{ll}
\forall A \in \mathscr{M}_{np}(\mathbb{K}),\ \ \forall B \in \mathscr{M}_{pq}(\mathbb{K}),\ \ \forall C \in \mathscr{M}_{qr}(\mathbb{K}), & A(BC) = (AB)C \\
\forall A \in \mathscr{M}_{np}(\mathbb{K}),\ \ \forall (B,C) \in \mathscr{M}_{pq}(\mathbb{K}), & A(B+C) = AB + AC \\
\forall (A,B) \in \mathscr{M}_{np}(\mathbb{K}),\ \ \forall C \in \mathscr{M}_{pq}(\mathbb{K}), & (A+B)C = AC + BC \\
\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \ \forall A \in \mathscr{M}_{np}(\mathbb{K}),\ \ \forall B \in \mathscr{M}_{pq}(\mathbb{K}), & \lambda(AB) = A(\lambda B) \\
\forall A \in \mathscr{M}_{np}(\mathbb{K}),\ \ \forall B \in \mathscr{M}_{pq}(\mathbb{K}), & (AB)^T = B^T A^T
\end{array}$$

PROPRIÉTÉ 3.1 — **Produit matriciel des matrices carrées**
La multiplication de matrice est une opération interne de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, associative et admettant la matrice I_n comme élément neutre.

PROPRIÉTÉ 3.2 — **Produit de matrices diagonales**
Si $(D, \Delta) \in (\mathscr{D}_n(\mathbb{K}))^2$ alors $D\Delta \in \mathscr{D}_n(\mathbb{K})$. On a

$$D\Delta = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \delta_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \delta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1\delta_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2\delta_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n\delta_n \end{pmatrix} \in \mathscr{D}_n(\mathbb{K})$$

PROPRIÉTÉ 3.3 — **Produit de matrices triangulaires**
Soit $(T, U) \in (\mathscr{T}_n^+(\mathbb{K}))^2$ alors $TU \in \mathscr{T}_n^+(\mathbb{K})$. On a

$$TU = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} & \cdots & t_{1n} \\ 0 & t_{22} & t_{23} & \cdots & t_{2n} \\ 0 & 0 & t_{33} & \cdots & t_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & t_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \cdots & u_{2n} \\ 0 & 0 & u_{33} & \cdots & u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & u_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} t_{11}u_{11} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdot \\ 0 & t_{22}u_{22} & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & t_{33}u_{33} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & t_{nn}u_{nn} \end{pmatrix} \in \mathscr{T}_n^+(\mathbb{K})$$

DÉFINITION 3.4 — **Puissances de matrices**
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $k \in \mathbb{N}$. Par définition

$$A^k = I_n \times \underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{k \text{ fois}}$$

PROPRIÉTÉ 3.5 — **Commutativité des puissances d'une même matrice**
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $(i, j) \in \mathbb{N}^2$

$$A^i A^j = A^{i+j} = A^{j+i} = A^j A^i$$

Attention ! De manière générale $(AB)^k \neq A^k B^k$. Par exemple $(AB)^2 = ABAB$... et c'est tout !

Propriété 3.6 — Puissances d'une matrice diagonale
Soit $k \in \mathbb{N}$ et D une matrice diagonale d'ordre n. On a

$$D^k = \begin{pmatrix} d_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n^k \end{pmatrix}$$

Propriété 3.7 — Puissance et transposée
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $k \in \mathbb{N}$, $\quad \left(A^k\right)^T = (A^T)^k$.

Théorème 3.8 — Binôme de Newton pour les matrices
Soit A et B deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $AB = BA$ et $m \in \mathbb{N}$.

$$(A+B)^m = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} A^k B^{m-k}$$

IV — Matrices inversibles

Définition 4.1 — Matrice inversible
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
*La matrice A est **inversible** si et seulement si il existe une matrice B telle que $AB = I_n$ et $BA = I_n$.*
*Dans ce cas, B est unique, on l'appelle l'**inverse** de A et on la note $B = A^{-1}$.*

On note l'ensemble des matrices inversibles $GL_n(\mathbb{K})$.

Propriété 4.2 — Cas des matrices diagonales
Une matrice diagonale d'ordre n est inversible si et seulement si ses coefficients diagonaux sont tous non nuls. On a alors

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} 1/d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1/d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1/d_n \end{pmatrix}$$

Propriété 4.3 — Critère de non-inversibilité
Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. S'il existe une matrice non nulle N (de taille quelconque) telle que $MN = O$ ou $NM = O$ alors M n'est pas inversible.

Propriété 4.4 — Transposée d'une matrice inversible

Soit A une matrice inversible d'ordre n. Alors A^T est inversible et $(A^T)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T$.

Propriété 4.5 — Produit de deux matrices inversibles

Soit A et B deux matrices inversibles d'ordre n.

Alors AB est inversible et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Propriété 4.6 — Puissance d'une matrice inversible

Soit A une matrice inversible d'ordre n et $k \in \mathbb{N}$. Alors A^k est inversible et $(A^k)^{-1} = (A^{-1})^k$. On note alors cet inverse A^{-k}.

Théorème 4.7

La matrice carrée A est inversible si et seulement si pour toute matrice X', le système $AX = X'$ est un système de Cramer.

Corollaire 4.8 — Cas des matrices triangulaires

Une matrice triangulaire est inversible si et seulement si ses coefficients diagonaux sont non nuls.