Fonctions polynômes

BCPST 1 — 2022/2023

Application du cours

Exercice 1

Pourquoi les fonctions suivantes ne sont-elles pas polynomiales ?

$$f_1(x) = |x| \qquad f_2(x) = \sqrt{|x|} \qquad f_3(x) = \mathrm{e}^x$$
$$f_4(x) = \cos x \qquad f_6(z) = \overline{z}$$

(f_6 définie sur $\mathbb{C}$, les autres sur $\mathbb{R}$).

Exercice 2

Soit P un polynôme de $\mathbb{K}[x]$. Déterminer le degré du polynôme $x \mapsto P(x+1) - P(x)$ en fonction du degré de P.

Exercice 3

Factoriser les polynômes suivants dans $\mathbb{C}[x]$, et dans $\mathbb{R}[x]$ quand ça a un sens : $x \mapsto x^3 - 1$; $x \mapsto x^4 + 1$; $x \mapsto x^n - 1$; $x \mapsto x^8 + x^4 + 1$; $x \mapsto x^2 + 1^3 - 8x^3$.

Exercices à avoir fait

Exercice 4

Soit $P \in \mathbb{R}[x]$ (resp. $\mathbb{C}[x]$). Que dire de P dans les cas suivants ?

1. $P(0) = P(1) = P(2) = \dots$ (à l'infini) ;
2. $P(x+1) = P(x)$;
3. $P(x+1) = -P(x)$;
4. $xP = P$.

Exercice 5

Déterminer tous les polynômes P de $\mathbb{R}[x]$ tels que

1. $P \circ P = P$;
2. $(x^2+1)P(x) = P(x^2)$;
3. $P(x) = xP'(x)$;
4. $P(x) = (2x+1)P'(x)$;

Exercice 6

Même exercice avec

1. $(2x^2 - 3)P'' - 6P = 0$;
2. $P(2x) = P'(x) \times P''(x)$.

Exercice 7

Déterminer tous les éléments P de $\mathbb{K}[x]$ vérifiant, pour tout $(x, y) \in \mathbb{K}^2$,

1. $P(xy) = P(x) + P(y)$ (étudier le degré);
2. $P(x+y) = P(x) + P(y)$ (étudier le coefficient dominant).
3. $P(x+y) = P(x)P(y)$;
4. $P(xy) = P(x)P(y)$ (étudier les racines).

Exercice 8

Soit P le polynôme défini dans $\mathbb{C}[x]$ par

$$P(x) = x^2 + x + 1$$

1. Quelles sont les racines complexes de P ?
2. Soit $(n, p, q) \in \mathbb{N}^3$. Démontrer que le polynôme Q défini par $Q(x) = x^{3n+2} + x^{3p+1} + x^{3q}$ est factorisable par P.

Exercice 9

1. Montrer que le polynôme $x \mapsto x^2 + x$ factorise le polynôme $x \mapsto (x+1)^{2n+1} - x^{2n+1} - 1$, pour tout entier naturel n.
2. Montrer que le polynôme $x \mapsto x^2 + x + 1$ factorise le polynôme $x \mapsto (x+1)^{2n+1} + x^{n+2}$, pour tout entier naturel n.
3. Montrer que le polynôme défini par $P_n(x) = \left(\sum_{k=0}^{n-1} x^k\right)^2 - n^2 x^{n-1}$ est divisible par $x \mapsto (x-1)^2$, pour tout entier naturel $n \geqslant 2$.

Exercice 10

Lesquelles des expressions suivantes sont des fonctions polynômes ?

$$\frac{x^5 - 11x^4 + 29x^3 - x^2 - 42x}{x^3 - 4x^2 + x + 6} \qquad \frac{x^5}{x^2(x-1)^2}$$
$$\frac{x^2 - x - 2}{x - 1} + \frac{x^2 - 3x + 2}{x + 1} + \frac{x^2 - 1}{x - 2}$$

Exercice 11

On considère la suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de polynômes définie par

$$P_0(x) = x^2$$
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P_{n+1}(x) = (1 + x^2)P_n'(x) - 2(n+1)xP_n(x)$$

Déterminer le degré de P_n ainsi que son coefficient dominant.

Exercice 12

1. Exprimer $\cos(5\theta)$ en fonction de $\cos\theta$ et $\sin\theta$, puis en fonction de $\cos\theta$ seul.
2. Trouver un polynôme P de degré 5 tel que l'on ait : $\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad \cos 5\theta = P(\cos\theta)$.

3. Quelles sont les racines de P ? Les ranger dans l'ordre croissant.
4. Donner la valeur de $\cos(\pi/10)$.

Exercice 13

Dans cette exercice, les polynômes sont à coefficients dans $\mathbb{C}$.

1. Soit $P(x) = ax^2 + bx + c$. Montrer que P admet une racine multiple ssi $b^2 - 4ac = 0$.
2. Montrer que $x^3 + px + q$ possède une racine multiple ssi $4p^3 + 27q^2 = 0$.
3. Montrer que $x^5 + px^2 + q$ possède une racine multiple ssi $q\left(3125q^3 + 108p^5\right) = 0$.

Exercice 14

Soit $P(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ un polynôme complexe. On note a, b, c les racines de P.

1. a) Exprimer $a + b + c$, abc et $ab + bc + ca$ à l'aide de α, β, γ.
   b) Exprimer de même $a^2 + b^2 + c^2$.
   c) Trouver trois nombres réels a, b, c tels que $a + b + c = 6$, $abc = 6$ et $a^2 + b^2 + c^2 = 14$.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}^3$ les systèmes suivants :

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 9 \\ x^{-1} + y^{-1} + z^{-1} = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y + z = 3 \\ xy + yz + zx = 2 \\ x^3 + y^3 + z^3 = 9 \end{cases}$$

Exercice 15

Soit P un polynôme à coefficients complexes tel que pour tout x réel, on a $P(x) \in \mathbb{R}$. Montrer que les coefficients de P sont réels.

Pour aller plus loin

Exercice 16

Déterminer les racines du polynôme P et donner leurs ordres de multiplicité

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin(k\theta) x^k$$

Exercice 17

On définit une suite $(P_n)_{n \geqslant 1}$ de polynômes en posant $P_0 = 1$, $P_1 = x$, et $P_n = xP_{n-1} - P_{n-2}$ pour tout entier $n \geqslant 2$. Montrer que $P_n^2 - P_{n+1}P_{n-1} = 1$ pour tout $n \geqslant 1$.

Exercice 18

Trouver λ tel que $x^3 + x^2 + \lambda x + 6$ admette deux racines x_1 et x_2 tel que $x_1 + x_2 = x_1 x_2$.

Exercice 19

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$$

1. Montrer que, pour tout entier naturel n, il existe un polynôme P_n tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{(1 + x^2)^{n+1/2}}.$$

   On raisonnera par récurrence, et on montrera en particulier que $P_{n+1}(x) = (1+x^2)P_n'(x) - (2n+1)P_n(x)$ pour $n \in \mathbb{N}$.
2. a) Expliciter P_0, P_1, P_2.
   b) Déterminer le coefficient dominant et le degré de P_n.
   c) Étudier la parité de la fonction P_n.
3. a) Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (1 + x^2)f'(x) + xf(x) = 0.$$

   b) En dérivant suffisamment la relation précédente montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P_{n+1} + (2n+1)xP_n + n^2(1+x^2)P_{n-1} = 0$$

   c) Calculer $P_n(0)$ pour $n \in \mathbb{N}$.
4. En utilisant les questions (1) et (3.b) montrer que $P_n' = -n^2 P_{n-1}$ quel que soit $n \in \mathbb{N}^*$. En déduire un procédé de calcul des polynômes P_n.

Exercice 20

1. Soit $P_1(x) = x - a$, $P_2(x) = x - b$ et $P_3 = x - c$ trois fonctions polynômes de degré 1 avec a, b et c trois réels distincts.
   a) Démontrer que $(P_1 \times P_2, P_1 \times P_3, P_2 \times P_3)$ est une base de $\mathbb{R}_2[x]$.
   b) Soit Q un polynôme de degré au plus 2. Démontrer qu'il existe trois réels A, B et C tels que

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{a, b, c\}, \quad \frac{Q(x)}{(x-a)(x-b)(x-c)} = \frac{A}{P_1(x)} + \frac{B}{P_2(x)} + \frac{C}{P_3(x)}$$

2. Soit $P_1(x) = x - a$, $P_2(x) = x - b$ deux fonctions polynômes de degré 1 avec $a \neq b$.

A) Démontrer que (P_1P_2, P_2, P_1^2) est une base de $\mathbb{R}_2[x]$.

B) Soit Q un polynôme de degré au plus 2. Démontrer qu'il existe trois réels A, B et C tels que

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{a, b, c\}, \quad \frac{Q(x)}{P_1^2(x)P_2(x)} = \frac{A}{P_1(x)} + \frac{B}{P_1^2(x)} + \frac{C}{P_2(x)}$$

Exercice 21

Soient a et b deux réels distincts. On note E l'ensemble des polynômes de $\mathbb{R}_4[x]$ admettant a et b comme racines. Montrer que E est un $\mathbb{R}$–espace vectoriel, puis déterminer une base de E.

Exercice 22

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

1. Montrer que f est C^∞ sur $\mathbb{R}$ et que, pour tout entier n, il existe un polynôme réel P_n tel que
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{(1+x^2)^{n+1}}$$
2. En dérivant n fois la relation $(1+x^2)f(x) = 1$, donner une relation liant P_n, P_{n-1} et P_{n-2}.
3. En déduire que
$$\forall n \in [\![2 \,;\, +\infty [\![, \quad P'_{n-1} = -n(n-1)P_{n-2}$$

Exercice 23

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs, avec $a_0 > 0$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad P_n(x) = -a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k x^k$$

1. Montrer que P_n admet une unique racine dans $\mathbb{R}_+$. On la note x_n.
2. Prouver que $x_n \in [\,0\,;\,1\,]$.
3. Démontrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone et en déduire qu'elle est convergente.
4. Quelle est sa limite ?

Exercice 24

Soit l'équation (E) d'inconnue $z \in \mathbb{C}$

$$z^4 - 4(1+\mathrm{i})\,z^3 + 12\mathrm{i}\,z^2 + 8(1-i)\,z - 5 = 0$$

1. Déterminer les solutions réelles de (E).
2. Déterminer les solutions imaginaires pures de (E).
3. En déduire une factorisation de (E) puis résoudre complètement (E).

Exercice 25

Résoudre l'équation suivante, sachant qu'il y a une solution imaginaire pure :

$$(\mathrm{i}-1)z^3 - (5\mathrm{i}-11)z^2 - (43+\mathrm{i})z + 9 + 37\mathrm{i} = 0$$