Fonctions polynômes

bcpst 1 — 2022/2023

Notations du chapitre

Dans ce chapitre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I — Fonctions polynômes

Définition I.1 — Fonction polynôme

*Une fonction **monôme** est une fonction définie de $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{K}$ et de la forme $x \mapsto x^n$ avec $n \in \mathbb{N}$.*
(Par convention $x \mapsto x^0$ est la fonction constante égale à 1.)
*La fonction P est une **fonction polynôme** (ou simplement un **polynôme**) à coefficients dans $\mathbb{K}$ si et seulement si*

$$\exists n \in \mathbb{N}, \quad \exists (a_0, a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}, \quad \forall x \in \mathbb{K}, \qquad P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

Vocabulaire Les réels $a_0, a_1, \ldots, a_n$ s'appellent les **coefficients du polynôme** P.
Le **polynôme nul** est la fonction constante égal à zéro (cas particulier où $n = 0$ et $a_0 = 0$).

Proposition I.2 — Coefficients du polynôme nul

Les coefficients du polynôme nul sont tous nuls.

Théorème I.3 — Théorème fondamental sur les polynômes

Deux fonctions polynômes sont égales sur $\mathbb{K}$ si et seulement si leurs coefficients sont égaux.

Définition I.4 — Degré d'un polynôme non nul

Soit P un polynôme non nul s'écrivant

$$\forall x \in \mathbb{K}, \qquad P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

avec $n \in \mathbb{N}$ et $(a_0, a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$.
*L'ensemble des entiers $\{k \in \mathbb{N} \text{ tel que } a_k \neq 0\}$ admet un plus grand élément : c'est le **degré** du polynôme P. On le note $\mathrm{d}^\circ(P)$. Soit p cet entier :*

- *a_p est alors **le coefficient de plus haut degré** de P ;*
- *$a_p x^p$ est **le monôme de plus haut degré** de P.*

Si P est le polynôme nul, on définit par convention son degré comme étant égal à $-\infty$.

1. $\mathrm{d}^\circ(P) = 0$ si et seulement si P est une fonction constante.
2. $\mathrm{d}^\circ(P) = 1$ si et seulement si P est une fonction affine.
3. L'écriture « $P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$ », *ne signifie pas* que P est de degré n car a_n peut tout à fait être nul. Cette écriture signifie seulement que P est un polynôme de degré *au plus* n.
4. L'écriture « $P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$ avec $a_n \neq 0$ » assure que P est un polynôme de degré n.
5. L'ensemble des fonctions polynômes de la variable x à coefficients dans $\mathbb{K}$ est noté $\mathbb{K}[x]$. L'ensemble de ces fonctions polynômes qui sont de degré inférieur ou égal à n est noté $\mathbb{K}_n[x]$.

II — Opérations sur les polynômes

Propriété 2.1 — Opérations sur les polynômes
Soit $\lambda \in \mathbb{K}$, $(P,Q) \in (\mathbb{K}[x])^2$.

- *les fonctions $P+Q$ et λP sont des fonctions polynômes ;*
- *la fonction $P \times Q$ est une fonction polynôme ;*
- *la fonction $P \circ Q$ est une fonction polynôme.*

Corollaire 2.2
L'ensemble $\mathbb{K}[x]$ est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des fonctions de $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{K}$.

Propriété 2.3 — Degré et combinaison linéaire de polynômes
Soit P et Q deux fonctions polynômes.

- $\mathrm{d}^\circ(P+Q) \leqslant \max(\mathrm{d}^\circ(P), \mathrm{d}^\circ(Q))$;
- *Si* $\mathrm{d}^\circ(Q) \neq \mathrm{d}^\circ(P)$ *alors* $\mathrm{d}^\circ(P+Q) = \max(\mathrm{d}^\circ(P), \mathrm{d}^\circ(Q))$;
- $\mathrm{d}^\circ(P \times Q) = \mathrm{d}^\circ(P) + \mathrm{d}^\circ(Q)$;
- *Si* $\mathrm{d}^\circ(Q) > 0$ *alors* $\mathrm{d}^\circ(P \circ Q) = \mathrm{d}^\circ(P) \times \mathrm{d}^\circ(Q)$;
- *Si* $\mathrm{d}^\circ(Q) = 0$ *alors* $\mathrm{d}^\circ(P \circ Q) = 0$ *ou* $-\infty$.

La convention $\mathrm{d}^\circ(0) = -\infty$ a permis d'énoncer ces résultat au cas où P et Q sont nuls, pourvu qu'on applique les règles suivantes

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad -\infty < n \quad -\infty + n = -\infty \quad -\infty + n = -\infty \quad -\infty \times n = -\infty$$

Corollaire 2.4
L'ensemble $\mathbb{K}_n[x]$ est un sous-espace vectoriel de l'ensemble $\mathbb{K}[x]$.

Corollaire 2.5 — Intégrité de l'ensemble des polynômes
Soit P et Q deux fonctions polynômes. Si, pour $x \in \mathbb{K}$, on a $P(x) \times Q(x) = 0$ alors $P = 0$ ou $Q = 0$.

Corollaire 2.6 — « Simplification » par un polynôme non nul
Soit P, Q_1 et Q_2 trois fonctions polynômes.
Si $PQ_1 = PQ_2$ et si P n'est pas le polynôme nul alors $Q_1 = Q_2$.

Corollaire 2.7
Si P est une fonction polynôme non constante, alors $1/P$ n'est pas une fonction polynôme.

Si P et Q sont deux fonctions polynômes, la fonction P/Q peut-être une fonction polynôme.

III — Polynôme dérivé

Propriété 3.1 — Polynôme dérivé

Soit $P \in \mathbb{K}[x]$. Si

$$\forall x \in \mathbb{K}, \qquad P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

*avec $n \in \mathbb{N}$ et $(a_0, a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$. Alors le **polynôme dérivé** du polynôme P est la fonction définie par*

$$\forall x \in \mathbb{K}, \qquad P'(x) = a_1 + 2a_2 x + \cdots + n a_n x^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} k a_k x^{k-1}$$

Notez que la somme démarre à 1. En effet, x^{k-1} n'est pas défini pour $k = 0$.

Propriété 3.2 — Propriété de la dérivation de polynômes

Soit P et Q deux fonctions polynômes et $\lambda \in \mathbb{K}$

1) $(P+Q)' = P' + Q'$
2) $(\lambda P)' = \lambda P'$
3) $(P \times Q)' = P'Q + Q'P$
4) $(P \circ Q)' = Q' \times P' \circ Q$

Propriété 3.3 — Degré du polynôme dérivé

Si P est une fonction polynôme alors $\mathrm{d}^\circ(P') \leqslant \mathrm{d}^\circ(P) - 1$.

Plus précisément, si P n'est une fonction constante, alors $\mathrm{d}^\circ(P') = \mathrm{d}^\circ(P) - 1$.

Si P est une fonction constante alors $\mathrm{d}^\circ(P') = -\infty$.

IV — Racines

Définition 4.1 — Racine d'un polynôme

*Soit $P \in \mathbb{K}[x]$. On appelle **racine** du polynôme P tout $\alpha \in \mathbb{K}$ tel que $P(\alpha) = 0$.*

Théorème 4.2 — Théorème de d'Alembert

Soit $P \in \mathbb{C}[x]$ un polynôme non constant. Le polynôme P admet au moins une racine dans $\mathbb{C}$.

Théorème 4.3 — Factorisation et racine

Soit $P \in \mathbb{K}[x]$ et α une racine de P. Il existe un polynôme Q tel que :

$$\forall x \in \mathbb{K}, \qquad P(x) = (x - \alpha) \times Q(x)$$

*Le polynôme P est dit **factorisable** par $(x - \alpha)$.*

Corollaire 4.4 — Cas de plusieurs racines

Soit $P \in \mathbb{K}[x]$ et $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ p racines distinctes de P.

Le polynôme P est factorisable par $(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_p)$.

Théorème 4.5 — Nombre de racines d'un polynôme de degré n.

Soit $P \in \mathbb{K}[x]$ un polynôme non nul de degré inférieur ou égal à n.

Le polynôme P admet au plus n racines distinctes.

Corollaire 4.6

Soit $n \in \mathbb{N}$ et P un polynôme de degré $n \in \mathbb{N}^*$ possédant n racines. Alors le polynôme P s'écrit

$$\forall x \in \mathbb{K}, \qquad P(x) = a_n(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_n)$$

avec $a_n \in \mathbb{K}^*$.

Corollaire 4.7

Soit $n \in \mathbb{N}$ et P un polynôme de degré inférieur ou égal à n.

Si P possède au moins $n+1$ racines distinctes alors P est le polynôme nul.

Définition 4.8 — Ordre de multiplicité d'une racine

Soit $P \in \mathbb{K}[x]$, P non nul.

1. *α est **racine d'ordre au moins r** de P si et seulement si P est factorisable par $(x-\alpha)^r$.*
2. *α est **racine d'ordre r** si et seulement si P est factorisable par $(x-\alpha)^r$ mais pas par $(x-\alpha)^{r+1}$.*
   *L'entier r est **l'ordre de multiplicité de la racine α**.*
3. *La racine α est **racine multiple** si son ordre de multiplicité est au moins 2, **racine simple** sinon.*

Proposition 4.9 — Ordre de multiplicité et factorisation

Soit P un polynôme et α une racine de P d'ordre de multiplicité r. Il existe un polynôme R tel que

$$R(\alpha) \neq 0 \qquad \text{et} \qquad \forall x \in \mathbb{K}, \qquad P(x) = (x-\alpha)^r R(x)$$

Corollaire 4.10 — Racines multiples et dérivée

Soit P un polynôme et α une de ses racines. Alors α est racine multiple de P si et seulement si $P'(\alpha) = 0$.