Nombres réels & sommes

BCPST 1 — 2022/2023

Fractions

Exercice 1

Écrire sous forme fractionnaire les nombres suivants.

$$a = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \qquad \text{et} \qquad b = \frac{7}{5} - \frac{17}{12} + \frac{4}{15}$$

Exercice 2

Soit a, b et c trois réels non nuls. Simplifier

$$A = \frac{a+b}{ab}(a^2+b^2-c^2) + \frac{b+c}{bc}(b^2+c^2-a^2) + \frac{c+a}{ca}(c^2+a^2-b^2).$$

Exercice 3

Résoudre l'équation

$$\frac{2x+3}{2x+1} - \frac{2x+5}{2x+7} = 1 - \frac{6x^2+9x-9}{(2x+1)(2x+7)}.$$

Exercice 4

Pour quelles valeurs du réel x l'expression est-elle définie ? La simplifier.

1. $\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{x+1} + \dfrac{2x}{1-x^2}$
2. $\dfrac{x^2-1}{(x+1)^2}$
3. $\dfrac{\dfrac{x+1}{x^2-1} + \dfrac{x-1}{x^2+1}}{\dfrac{x+1}{x^2+1} + \dfrac{x-1}{x^2-1}}$
4. $\dfrac{(2x+3)^2-(x+2)^2}{2x^2+2x+10(x+1)}$
5. $\dfrac{\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}} - \dfrac{\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}$

Exercice 5

Soit a et b des réels strictement positifs. Pour quelles valeurs du réel x l'expression est-elle définie ? La simplifier.

1. $\dfrac{x-a}{ax} + \dfrac{a-b}{ab} + \dfrac{b-x}{xb}$
2. $\dfrac{\left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} - \dfrac{x}{ab}\right)(x+a+b)}{\dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} + \dfrac{2}{ab} - \dfrac{x^2}{a^2b^2}}$

Exercice 6

Pour quelles valeurs du réel x l'expression est-elle définie ? Calculer ensuite la somme.

1. $\dfrac{2x+3}{2(2x-3)} + \dfrac{12x}{9-4x^2} + \dfrac{3-2x}{4x+6}$
2. $\dfrac{2x^2+2x}{x^2+2x+1} + \dfrac{2x+2}{x^2-1} + \dfrac{4x^3+4x}{1-x^4}$

Inégalités & ordre

Exercice 7

Résoudre les inéquations suivantes.

1. $\dfrac{2x-1}{4} < \dfrac{4-3x}{5} - \dfrac{3-x}{10}$
2. $\dfrac{x^2-4x+3}{3-2x} \leqslant 1-x$
3. $\dfrac{1}{x-1} + \dfrac{2}{x-2} \leqslant \dfrac{3}{x-3}$

Exercice 8

Résoudre la double inéquation

$$-1 < \frac{2-3x}{x+3} < 1.$$

Exercice 9

Résoudre suivant le paramètre $m \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ l'inéquation d'inconnue x :

$$\frac{x-m}{m-1} > 2-x.$$

Exercice 10

Comparer les paires de nombres suivants.

1. $3+\sqrt{7}$ et $\sqrt{29}$
2. $\dfrac{5+\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}}$ et $\sqrt{5}$
3. $\sqrt{2}+\sqrt{11}$ et $\sqrt{5}+\sqrt{7}$
4. $\dfrac{\pi^2}{6}$ et $\dfrac{3}{2}$

Exercice 11

Les ensembles suivants admettent-ils une borne supérieure ? Un plus grand élément ? Un plus petit élément ? Une borne inférieure ?

1. $A = \left\{(-1)^n + \dfrac{1}{n} \ \text{ avec } \ n \in \mathbb{N}^*\right\}$;
2. $B = x \in \mathbb{Q}$ tel que $x^2 < 2$.

Exercice 12

1. Quel ensemble parcourt $1/x$ lorsque $-4 < x < 5$?
2. Pour quelles valeurs entières de n a-t-on $n^2-3n+2 > 0$?
3. Quels ensembles parcourent x^2 et x^3 lorsque $x \geqslant -2$?

4. Pour quelles valeurs réelles de x a-t-on $x \geqslant x^2$? Et $x^2 \geqslant x$?

Exercice 13

1. Soient a et b deux rels tels que $a > 1$ et $b > 1$. Montrer les inégalités suivantes
   A) $a + b \leqslant 2ab$
   B) $\dfrac{2}{a+b} + ab < a^2 + b^2$
   C) $3\left(a - \dfrac{1}{b}\right)\dfrac{a}{b} < a^3 - \dfrac{1}{b^3}$
2. Soit $\alpha > 0$. Montrer que l'on a
$$\forall n \in [\![3\ ;\ +\infty [\![, \qquad (1+\alpha)^n > 1 + n\alpha + \frac{n(n+1)}{2}\alpha^2$$
   En déduire
$$\forall n \in [\![3\ ;\ +\infty [\![, \qquad \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n > \frac{1}{8}\left(13 - \frac{1}{n}\right)$$

Exercice 14

Soit a, b, c des réels strictement positifs. Montrer que
1. $(a+b)\left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}\right) \geqslant 4$;
2. $(a+b)(a+c)(b+c) \geqslant 8abc$.

Expression du second degré

Exercice 15

Factoriser ou simplifier les expressions suivantes.
1. $x^2 - 8$
2. $x^4 - 9$

Exercice 16

Développer le plus simplement possible l'expression suivante.
$$\left[x^2 + (2+\sqrt{2})x + 1 + \sqrt{2}\right] \times \left[x^2 + (2-\sqrt{2})x + 1 - \sqrt{2}\right]$$

Exercice 17

Développer le plus simplement possible l'expression suivante.
$$(x^2-1)(x^2 + x\sqrt{2} + 1)(x^2+1)(x^2 - x\sqrt{2} + 1)$$

Exercice 18

Soit $m \in \mathbb{R} \setminus \{1/2\}$. Déterminer les valeurs de m pour lesquelles l'équation
$$(2m-1)x^2 + 2(m+1)x + m + 3 = 0$$
a deux racines réelles inférieures ou égales à 1.

Exercice 19

Résoudre dans $\mathbb{R}$:
$$\sqrt{3-x} - \sqrt{x+1} > \frac{1}{2}$$

Exercice 20

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations
1. $\sqrt{x^2 - x - 2} \geqslant |x-2|$;
2. $\sqrt{x^2 - x - 2} \geqslant x - 2$;
3. $\sqrt{x^2 - x - 2} \geqslant |3x+2|$;
4. $\sqrt{x^2 - x - 2} \geqslant 3x + 2$.

Exercice 21

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$.
1. Montrer que
$$\forall x \in [a\ ;\ b], \quad (a-x)(x-b) \leqslant \frac{(b-a)^2}{4}$$
2. Montrer que, pour $(x, y) \in [a\ ;\ b]^2$,
$$\min\{(x-a)(b-y), (y-a)(b-x)\} \leqslant \frac{(b-a)^2}{4}$$
   Indication : *On pourra raisonner par l'absurde.*

Exercice 22

Soit m un paramètre réel. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\sqrt{1-x^2} \leqslant m - x$.

Exercice 23

Simplifier
1. $\dfrac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 2x - 3}$;
2. $\dfrac{y^2 + 7y + 10}{y^2 - 25}$;
3. $\dfrac{a^2 + 5a - 14}{a^2 - 4a - 21}$;
4. $\dfrac{x^2 - 2xy + y^2}{x - y}$.

Exercice 24

1. Quelles sont les valeurs de a et b tels que
$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}, \qquad \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-2} = \frac{4x+1}{x^2 - x - 2}$$
2. Quelles sont les valeurs de a et b tels que
$$\forall z \in \mathbb{R} \setminus \{3, -2\}, \qquad \frac{a}{z-3} + \frac{b}{z+2} = \frac{z+7}{(z-3)(z+2)}$$
3. Quelle est la valeur de a tel que pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1/2, -2\}$,
$$\frac{a}{2x+1} + \frac{1}{x+2} = \frac{4x+5}{(2x+1)(x+2)}$$

Exercice 25

1. Quelle est la forme simplifiée de $(z^2 + 4z - 5)/(z^2 - 4z + 3)$?
   (a) $\dfrac{z+5}{z+3}$ (b) $\dfrac{z+5}{z-3}$
   (c) $\dfrac{z-5}{z+3}$ (d) $\dfrac{z-5}{z-3}$

2. Que vaut la somme $\dfrac{1}{w-2}+\dfrac{1}{w+7}$?

(a) $\dfrac{5}{w^2+5w-14}$ (b) $\dfrac{5}{w^2+5w+14}$

(c) $\dfrac{5}{w^2-5w+14}$ (d) $\dfrac{5}{w^2-5w-14}$

Équations

Exercice 26

Résoudre les équations suivantes, d'inconnue réelle x

1. $(E_1) : x^3+4x^2+x-6=0$;
2. $(E_2) : 3x^4+5x^2-2=0$

Exercice 27

Discuter et résoudre, suivant les valeurs du paramètre m, les équations ou inéquations

1. $(m+1)x+2-m=0$;
2. $\dfrac{m}{x-1}\leqslant\dfrac{1}{x+2}$;
3. $\sqrt{2x+m}\geqslant x+1$.

Exercice 28

Résoudre avec $x\in\mathbb{R}$

1. $(I_1) : \dfrac{1}{4x-1}<\dfrac{1}{x^2+x+1}$
2. $(I_2) : \dfrac{2x+1}{x+1}<\dfrac{3x-2}{x+1}$

Exercice 29

Résoudre avec $x\in\mathbb{R}$

1. $(I_1) : \dfrac{x}{x^2+1}\leqslant\dfrac{x-1}{(x-1)^2}$
2. $(I_2) : x+1>\sqrt{x^2+2x}$
3. $(I_3) : \ln(x^2-4\mathrm{e}^2)<1+\ln(3x)$

Exercice 30

Résoudre dans $\mathbb{R}$,

$$\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}=1$$

Exercice 31

Résoudre dans $\mathbb{R}$ (x étant l'inconnue)

1. l'équation $\sqrt{4-x}=3-2x$;
2. l'inéquation $\sqrt{4-x}<3-2x$;
3. l'inéquation $\sqrt{4-x}>3-2x$.

Exercice 32

Soit λ un réel donné.

1. Résoudre l'inéquation réelle $\dfrac{1}{x}<\lambda$.
2. Dans le plan muni d'un repère représenter l'ensemble E des points de coordonnées (x,y) tels que $\dfrac{x}{y}<\lambda$.

Partie entière

Exercice 33

Trouver les réels x tels que $\left\lfloor\sqrt{x^2+1}\right\rfloor=2$.

Exercice 34

Trouver les réels x tels que $\left\lfloor\sqrt{x}\right\rfloor=\sqrt{\lfloor x\rfloor}$.

Exercice 35

Soient x et y deux nombres réels. Montrer

1. $\lfloor x\rfloor+\lfloor y\rfloor\leqslant\lfloor x+y\rfloor$;
2. $\lfloor x\rfloor\lfloor y\rfloor\leqslant\lfloor xy\rfloor$ si x et y sont positifs ;
3. $\lfloor x\rfloor\lfloor y\rfloor\geqslant\lfloor xy\rfloor$ si x et y sont négatifs.

   Donner des exemples où ces inégalités sont strictes.

Exercice 36

Soit $k\in\mathbb{R}_+^*$. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation d'inconnue x $\left\lfloor\dfrac{x}{1-kx}\right\rfloor=2$.

Exercice 37

Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Montrer que

$$\lfloor x\rfloor+\lfloor y\rfloor\leqslant\lfloor x+y\rfloor\leqslant\lfloor x\rfloor+\lfloor y\rfloor+1$$

Montrer qu'il peut ne pas y avoir égalité.

Exercice 38

Pour tout réel x et tout entier naturel non nul n, montrer les relations

1. $0\leqslant\lfloor nx\rfloor-n\lfloor x\rfloor\leqslant n-1$;
2. $\left\lfloor\frac{1}{n}\lfloor nx\rfloor\right\rfloor=\lfloor x\rfloor$;
3. $\displaystyle\sum_0^{n-1}\left\lfloor x+\frac{k}{n}\right\rfloor=\lfloor nx\rfloor$.

Exercices de bases sur les sommes

Exercice 39

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Écrire à l'aide du signe $\sum$ les sommes suivantes, pour $E=\{x_1,x_2,\dots,x_n\}$ une partie finie de $\mathbb{R}$:

1. somme de tous les éléments de E ;
2. somme des inverses des éléments de E (quand cet inverse existe) ;
3. somme des éléments de E qui sont des entiers ;
4. somme des éléments de E multiplié par leur successeur dans l'énumération de E (quand il existe).

Exercice 40

Soit i, j et n trois entiers naturels non nuls, avec $j\geqslant i$. Que valent les sommes ci-dessous ?

$$\sum_{k=1}^{n}0\quad;\quad\sum_{k=1}^{n}1\quad;\quad\sum_{k=0}^{n}1\quad;\quad\sum_{k=1}^{n}n\quad;\quad\sum_{k=i}^{j}1.$$

Exercice 41 — *Indices pairs et impairs*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![1 \,;\, n]\!]$.

1. Quel est le k–ième nombre pair ? Le k–ième nombre impair ?
2. Écrire et calculer la somme
   a) des entiers pairs compris entre 1 et $2n$;
   b) des entiers impairs compris entre 1 et $2n$ (deux écritures possibles) ;
   c) des entiers pairs compris entre 0 et n.

Exercice 42

Parmi les expressions suivantes, lesquelles sont égales à n, lesquelles sont différentes ? Justifier.

$$\sum_{k=0}^{n} 1 \qquad \sum_{k=0}^{n-1} 1 \qquad \sum_{k=1}^{n} \frac{2k}{n} \qquad \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2k}{n}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k - \sum_{h=0}^{n-1} h \qquad \sum_{k=1}^{n} k - \sum_{h=2}^{n-1} h \qquad \sum_{k=1}^{n-1} k - \sum_{h=2}^{n-2} h \qquad \sum_{k=n}^{n} 1$$

$$\sum_{k=n}^{n} k.$$

Exercice 43

Soient n et k deux entiers tels que $1 \leqslant k \leqslant n$. Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies ?

1. $\dfrac{n!}{(n-k)!}$ est un nombre entier ;
2. $\dfrac{n!}{k!}$ est un nombre entier ;
3. il y a $n-k$ entiers compris entre k et n ;
4. la somme des entiers compris entre k et n est $(n-k+1)\dfrac{n+k}{2}$.

Exercice 44

Soient n un entier non nul. Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies ?

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 3^k = \frac{3^{n+1}-1}{2}$;
2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} 3^k = \frac{3^{n-1}-1}{2}$;
3. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^k = 4^n$;
4. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 3^k = 4^n - 3$;
5. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} 3^k = 4^n - 3^n$;
6. $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} 3^k = 4^n - 1 - 3n$;

Exercice 45 — *Sommes télescopiques*

1. Soit $x_0, x_1, \ldots, x_{n+1}$, $n+2$ complexes ($n \in \mathbb{N}$). Montrer que

$$\sum_{i=0}^{n} x_i - x_{i+1} = x_0 - x_{n+1}$$

et

$$\sum_{i=0}^{n} x_{i+1} - x_i = x_{n+1} - x_0$$

2. Que valent $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i - x_{i+1}$ et $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_{i+1} - x_i$?
3. Calculer les sommes suivantes
   a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$

   Indication : $\dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}$

   b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k}{k+1}\right)$;
   c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}$.

Exercice 46 — *Une formule de sommation*

1. Démontrer la formule

$$\frac{1}{\cos a \cos b} = \frac{1}{\sin(a-b)}(\tan a - \tan b)$$

Préciser les ensembles de définition.

2. Soit $n \in [\![3 \,;\, +\infty [\![$. Calculer, lorsqu'elle a un sens, la somme

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{\cos(k-1)x \ \cos kx}$$

Exercice 47

Soit $a \in [\, 0 \,;\, 1 \,[$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On pose

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{a^k}{(1-a^k)(1-a^{k+1})}$$

En considérant la somme $(1-a)u_n$, montrer que

$$S_n = \frac{a(1-a^n)}{(1-a)^2(1-a^{n+1})}$$

Exercice 48

1. Soit $(a_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ une famille de $n+1$ réels. Démontrer que

$$\sum_{k=0}^{n-1} k(a_k - a_{k+1}) = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right) - n a_n$$

On pourra faire apparaître une somme télescopique.

2. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} k 2^k$.

Calculs de sommes

Exercice 49

Calculer en fonction de l'entier naturel n les sommes suivantes

1. $\sum_{k=1}^{n+1} k(1-k)$;
2. $\sum_{k=2}^{n+2} k(1-k)$;
3. $\sum_{k=n}^{n^2} k^2$;
4. $\sum_{k=-n}^{n} k^2$.

Exercice 50

Calculer les sommes suivantes

1. $\sum_{k=1}^{n+2} k(2-k)$;
2. $\sum_{k=2}^{n} (k+1)(k-1)$;
3. $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k k$;
4. $\sum_{k=0}^{n} \frac{(n-k)k}{2}$.

Exercice 51

Dans cet exercice n, m et p sont trois entiers non nuls, a et x deux complexes. Calculer les sommes suivantes

$$\sum_{k=0}^{n} x^{2k} \quad \sum_{k=0}^{n} x^{2k+1} \quad \sum_{k=0}^{n} a^k 2^{3k} x^{-k} \ (\text{où } x \neq 0)$$

$$\sum_{i=0}^{n} (i^2+n+3) \quad \sum_{0 \leqslant k \leqslant n} \frac{p}{q+1}$$

Coefficients binomiaux

Exercice 52

Calculer les sommes suivantes

1. $\sum_{k=0}^{n} \binom{3}{k}$;
2. $\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k}$;
3. $\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k-1}$;
4. $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-3)^{n-k}$;
5. $\sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k} 2^{k-1}$;
6. $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k-1} 3^k 2^{-k}$.

Exercice 53

Calculer les sommes suivantes

1. $\sum_{p=0}^{n} p\binom{n}{p}$
2. $\sum_{p=0}^{n} p(-3)^p\binom{n}{p}$

Exercice 54

Montrer que $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k} = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$.

Exercice 55

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les sommes suivantes

$$A_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \quad B_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}$$

$$P_n = \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{n} \binom{n}{k} \quad \text{et} \quad I_n = \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ impair}}}^{n} \binom{n}{k}$$

On calculera $P_n + I_n$ et $P_n - I_n$.

Exercice 56

Soit $n \in \mathbb{N}$, avec $n \geqslant 2$ et $x \in \mathbb{R}$. Calculer les sommes

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} x^{k-1} \quad T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} x^{k-2}$$

1. *Première méthode* Utiliser la petite formule et la formule du binôme pour calculer $S_n(x)$ et $T_n(x)$.
2. *Deuxième méthode*
   a) Démontrer que $R_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$ définit une fonction continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.
   b) Calculer $R'_n(x)$ de deux façons différentes, et en déduire $S_n(x)$.
   c) Calculer de même $T_n(x)$.

Exercice 57

Soit n et p deux entiers naturels. Montrer par récurrence que $\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$.

Exercice 58

Démontrer (k, p et n étant des entiers naturels)

$$\binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k} = \binom{p}{k}\binom{n}{p}$$

Exercice 59

Montrer les formules suivantes (en utilisant éventuellement l'exercice 58)

1. $\sum_{k=0}^{p} \binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k} = 2^p \binom{n}{p}$
2. $\sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k} = 0$
3. ★ $\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \Big/ \binom{n}{k} = \frac{n+1}{n+1-m}$

Autres grands opérateurs

Exercice 60

Calculer les sommes doubles

1. $\sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} i$;
2. $\sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} ij$;
3. $\sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{i} ij$;
4. $\sum_{0 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} ij$;

5. $\displaystyle\sum_{0\leqslant j\leqslant i\leqslant n} ij$;
6. $\displaystyle\sum_{0\leqslant i\leqslant j\leqslant n} j-i$.

Exercice 61

Que valent les expressions suivantes ?

1. $\displaystyle\prod_{k=0}^{n} k$
2. $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} k$
3. $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n}]\,i\,;\,i+1\,[$
4. $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} [\,i\,;\,i+1\,[$
5. $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{n} [\,i\,;\,i+1\,]$
6. $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{n} \left[0\,;\,\frac{1}{i}\right]$

Exercice 62

Calculer, en fonction de n, les produits suivants

1. $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(2k)$;
2. $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(2k+1)$;
3. $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{k}\right)$.
4. $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)$.

Exercice 63

1. Pour k et n dans $\mathbb{N}^*$, calculer $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} i$, $\displaystyle\prod_{i=k}^{k+n} i$.
2. A) Montrer par récurrence sur n que

$$\sum_{i=0}^{n-1}\binom{p+i}{p}=\binom{p+n}{p+1}$$

B) Calculer $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\prod_{j=0}^{p-1}(i+j)$.

Exercices d'entraînement

Exercice 64

Montrer que

$$\sum_{k=1}^{n} k! \leqslant (n+1)!$$

Exercice 65

Soit a et r dans $\mathbb{R}$. On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite arithmétique de raison r et de premier term a.

1. Exprimer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$ en fonction de n, a et r.
2. Exprimer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (u_k)^2$ en fonction de n, a et r.

Exercice 66

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Soient $(a_1,\dots,a_n)$ et $(b_1,\dots,b_n)$ deux n-uplets de nombres réels. Démontrer l'identité

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2+\sum_{1\leqslant k<l\leqslant n}(a_k b_l-a_l b_k)^2 =\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right).$$

En déduire l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right| \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2}$$

Exercice 67

Soit $p\in\mathbb{Z}$, $q\in\mathbb{N}^*$ et $n\in\mathbb{N}$. Montrer que

$$\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{p}{q}\right)^k=\frac{1}{q^{n+1}}\,\frac{p^{n+1}-q^{n+1}}{p-q}$$

Exercice 68

Montrer les égalités suivantes

1. $\forall n\geqslant 0,\quad \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k(k!)=(n+1)!-1$
2. $\forall n\geqslant 1, \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}=\frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$

Exercice 69

Montrer par récurrence que pour n et k dans $\mathbb{N}^*$,

$$\sum_{p=1}^{n}\frac{(p-1)!}{(p+k)!}=\frac{1}{k\,.\,k!}-\frac{n!}{k(n+k)!}$$

Exercice 70

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On pose $\omega=\exp\left(\dfrac{2i\pi}{n}\right)$. Calculer

$$S_n=\sum_{k=0}^{n-1}\omega^k \qquad T_n=\sum_{k=0}^{n-1}\omega^{kp}$$

$$U_n=\sum_{k=0}^{n}\left|\omega^k-1\right| \qquad V_n=\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}\omega^k.$$

Exercice 71

1. Montrer que, pour tout n-uplet $(x_1,\dots,x_n)$, on a

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2=\sum_{i=1}^{n} x_i^2+2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} x_i x_j$$

2. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} i\times j$.

Exercice 72

Calculer, pour $n\in\mathbb{N}$, $S_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k k^2$.

Indication : *On pourra calculer S_0 et S_1, deviner une formule générale, et la démontrer par récurrence.*

Exercice 73 — *Un classique*

Soit $x\in\mathbb{R}$ et soit $n\in\mathbb{N}$. On pose $C_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\cos(kx)$ et $S_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\sin(kx)$.

1. On demande de calculer C_n et S_n de deux façons :
   A) en reconnaissant dans $Z_n = C_n + iS_n$ la somme des premiers termes d'une suite géométrique ;
   B) en calculant $\sin(x/2)C_n$ et $\sin(x/2)S_n$ au moyen de sommes télescopiques.
2. En déduire le calcul de $\sum_{k=1}^{n} k\cos(kx)$ et de $\sum_{k=1}^{n} k\sin(kx)$, où $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 74

Calculer les sommes suivantes, avec $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On donnera le résultat sous forme d'un réel.

1. $S_1 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(kx)$;
2. $S_2 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos\big((3k+1)x\big)$;
3. $S_3 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos^2(kx)$.

Exercice 75

Calculer $S = \cos\left(\frac{\pi}{11}\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{11}\right) + \cos\left(\frac{5\pi}{11}\right) + \cos\left(\frac{7\pi}{11}\right) + \cos\left(\frac{9\pi}{11}\right)$

INDICATION : *Interpréter cette somme comme la partie réelle d'un nombre complexe.*

Exercice 76

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Résoudre l'équation d'inconnue réelle x $\cos a + \cos(a+x) + \cos(a+2x) + \cdots + \cos(a+nx) = 0$.

Exercice 77

1. Montrer que
$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad x + \frac{1}{x} \geqslant 2$$
2. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $(i,j) \in \mathbb{N}$. Montrer que
$$x^i + x^j \geqslant 2x^{\frac{i+j}{2}}$$
3. Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $n \in \mathbb{N}$. Montrer que
$$\sum_{k=0}^{2n} a^k \geqslant (2n+1)a^n$$

Exercice 78

1. Montrer que, pour $k \in \mathbb{N}^*$,
$$\sqrt{k+1} - \sqrt{k} \leqslant \frac{1}{2\sqrt{k}} < \sqrt{k} - \sqrt{k-1}$$
2. Calculer la partie entière de $S = \sum_{k=1}^{n^2} \frac{1}{2\sqrt{k}}$.

Exercice 79

Calculer $\sum_{k=1}^{n^2} \left\lfloor \sqrt{k} \right\rfloor$.