Suites numériques

BCPST 1 — 2022/2023

Suites classiques

Exercice 1

Donner le terme général et étudier la convergence de suites définies par

1. $u_0 = 1, u_1 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = 3u_n$;
2. $u_0 = 1, u_1 = -1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = 9u_{n+1} - 20u_n$;
3. $u_0 = 1, u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = 2u_{n+1} - 5u_n$;
4. $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n - \frac{1}{3}$;
5. $u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n - \frac{1}{3}$.
6. $u_0 = 5$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = -4u_n + 15$.

Exercice 2

Donner le terme général des suites vérifiant les relations de récurrences suivantes, sachant que $u_0 = u_1 = 1$:

1. $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = u_{n+1} + \frac{1}{2}u_n$;
2. $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = 10u_{n+1} - 21u_n$;
3. $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n$;
4. $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = 2u_{n+1} + 2u_n$;

Exercice 3

On cherche le terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 25, u_1 = 31$ et

$$\forall n \in [\![2 \ ; +\infty [\![, \quad u_n - 4u_{n-1} + 4u_{n-2} = n^2 + n + 1.$$

1. Chercher une suite particulière $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la forme $\left(an^2 + bn + c\right)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant la relation (mais pas nécessairement les conditions initiales).
2. Quelle relation vérifie la suite $(u_n - z_n)_{n\in\mathbb{N}}$? En déduire $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 4

On définit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{2u_n}$. Exprimer u_n en fonction de n et étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Indication : *On pourra définir et étudier la suite $v_n = \ln(u_n)$.*

Exercice 5

1. On pose $u_0 = 1, v_0 = -1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{3}(u_n + 2v_n) \\ v_{n+1} = \frac{1}{3}(2u_n + v_n) \end{cases}$$

   Déterminer u_n et v_n en fonction de n en établissant une relation de récurrence d'ordre 2 sur u et sur v.

2. On pose $a_0 = 1$ et $a_0 = 2$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} a_{n+1} = \left(a_n b_n^2\right)^{1/3} \\ b_{n+1} = \left(a_n^2 b_n\right)^{1/3} \end{cases}$$

   Vérifier que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont bien définies. Les expliciter en fonction de n et déterminer leurs limites respectives.

Exercice 6 — *Pas classiques, mais à savoir faire.*

1. Déterminer toutes les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n + n^2$.
2. Déterminer toutes les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n + 2^n$.
3. Déterminer toutes les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = (n+1)^2 u_n$.
4. Déterminer toutes les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = 2^n u_n$.

★ **Exercice 7** — *À comprendre*

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}_+^*$, on pose $f_n(x) = x^n + \ln x$.

1. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution. On note u_n cette solution.
2. Déterminer le signe de $f_n(0)$ et de $f_n(1)$. En déduire que $u_n \in \,]0 \ ; 1[$.
3. Calculer $f_{n+1}(u_n)$ et en déduire la monotonie de u, puis sa convergence. Quelle est sa limite ?

Convergence

Exercice 8 — *Vrai ou faux ?*

1. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante et minorée par 2, alors elle converge vers 2.
2. Le produit de deux suites minorées est une suite minorée.
3. Si $(u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent.
4. Si u et v sont deux suites bornées alors uv est une suite bornée.
5. Si u et v sont deux suites, si u et uv sont bornées, alors v est bornée.
6. La suite $\left(\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1.
7. Toute suite convergente est monotone.
8. Toute suite monotone est convergente.

9. Si $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Exercice 9

Quel est le plus grand terme de la suite définie par

1. $u_n = -3n^2 + 19n - 28$;
2. $u_n = \dfrac{(3{,}5)^n}{n!}$;
3. $u_n = \dfrac{6^n}{n!}$.

Exercice 10

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'entiers relatifs. Montrer que si u est convergente alors elle est stationnaire (c'est-à-dire constante à partir d'un certain rang).

Théorème d'encadrement

Exercice 11

À l'aide d'un encadrement, montrer que la suite de terme général

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$$

est convergente et donner sa limite.

Exercice 12

Montrer que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \sqrt{k+1} - \sqrt{k} \leqslant \frac{1}{2\sqrt{k}}$$

En déduire le comportement de la suite de terme général $u_n = 1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{n}}$

Exercice 13

Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Convergence et limite éventuelle des suites définies par

$$u_n = \frac{\lfloor nx \rfloor}{n}; \quad v_n = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} \lfloor kx \rfloor; \quad w_n = \frac{\lfloor 2^n x \rfloor}{\lfloor 3^n x \rfloor}.$$

Exercice 14 — *Étude de* $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k}{n^2}\right)$

1. Démontrer que

$$\forall x \in [\,0\,;1\,], \quad x - \frac{x^3}{6} \leqslant \sin x \leqslant x$$

2. En déduire un encadrement de u_n.
3. Limite et équivalent ?

Exercice 15 — *Série harmonique*

1. Démontrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \frac{x}{1+x} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$$

2. Montrer que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{k+1} \leqslant \ln(1+k) - \ln(k) \leqslant \frac{1}{k}$$

3. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $H_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{n}$. À l'aide de l'inégalité précédente, démontrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \ln(n+1) \leqslant H_n \leqslant \ln(n+1) + \frac{n}{n+1}$$

4. Étudier alors la convergence de $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
5. Démontrer que $H_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$.

Exercice 16 — *Moyenne arithmético-géométrique*

Soit a et b deux réels positifs tels que $0 < a < b$. On définit les deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$u_0 = a, \;\; v_0 = b,$$
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}, \quad v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}.$$

1. a) Montrer que

$$\forall (x,y) \in {\mathbb{R}_+}^2, \quad \frac{x+y}{2} \geqslant \sqrt{xy}$$

b) Montrer par récurrence, en utilisant le résultat de la question précédente, que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant v_{n+1} \leqslant v_n \leqslant b.$$

c) En déduire que les deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes.

d) On note $l = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ et $l' = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$. Justifier avec soin que $0 < l \leqslant l'$.

2. a) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+1} - u_{nr+1} = \frac{1}{2}(\sqrt{v_n} - \sqrt{u_n})^2.$$

puis que

$$l' - l = \frac{1}{2}\left(\sqrt{l'} - \sqrt{l}\right)^2.$$

b) Montrer que si $l \neq l'$ alors $\sqrt{l'} + \sqrt{l} = \dfrac{1}{2}(\sqrt{l'} - \sqrt{l})$.

c) En tirant une contradiction du résultat précédent, en déduire que $l = l'$.

On appelle la limite commune des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *la moyenne arithmético-géométrique de a et b.*

3. Que valent les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ quand $a=0$ et $b>a$? Quelles sont leurs limites ?
Que valent les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ quand $a=b$? Quelles sont leurs limites ?

Exercice 17

Montrer que

$$\forall x\in\mathbb{R}_+^*,\quad x-\frac{x^2}{2}\leqslant \ln(1+x)\leqslant x$$

En déduire la convergence et la limite de $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n^2}\right)$.

Calculs de limite

Exercice 18

Calculer les limites quand n tend vers $+\infty$ de

1. $a_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$;
2. $b_n=\dfrac{7^{n+1}+6^{n+1}}{7^n+6^n}$;
3. $c_n=\dfrac{n^2-6n+3}{n^4+2n}$;
4. $d_n=2^n\sin(\theta/2^n)$;
5. $e_n=\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{n}\right)^n$;
6. $f_n=\sqrt[n]{n^2}$.

Exercice 19

À l'aide d'équivalents, calculer les limites en $+\infty$ des suites suivantes :

1. $a_n=\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n$;
2. $c_n=\dfrac{1}{n}(\cos(1/n)-1)^{-1}(\sqrt[3]{1+1/n}-1)$;
3. $d_n=\dfrac{n^2+\cos n}{2^n+\sin n}$;
4. $f_n=\dfrac{(\ln n)^2+\sqrt{n^2+1}}{\cos(n!)+n^2}$;
5. $g_n=\dfrac{1000^n+n!}{n!+n^{1000}}$;
6. $l_n=\sqrt{2n+1}+2n+\ln n$
7. $m_n=\dfrac{\exp(\sin(1/n))-1}{(1/2)^n+n^2}$;
8. $r_n=\dfrac{\sqrt[3]{1+\sin(1/n)}-\mathrm{e}^{1/3n}}{\sin(1/n)+\tan(1/n)}$.

Suites adjacentes

Exercice 20

Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes

$$\forall n\in[\![3\,;+\infty[\![,\quad u_n=\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k^2+1},\qquad v_n=u_n+\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}$$

Exercice 21

Montrer que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente en montrant que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{k^2},\quad u_n=S_{2n},\quad v_n=S_{2n+1}.$$

Donner une valeur approchée à 10^{-2} près de sa limite.

Exercice 22

Soient a_0 et b_0 deux réels fixés. On définit par récurrence les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$a_{n+1}=\frac{2a_n+b_n}{3}\qquad\text{et}\qquad b_{n+1}=\frac{a_n+2b_n}{3}$$

1. Montrer que ces deux suites sont adjacentes.
2. En calculant a_n+b_n, montrer qu'elles convergent vers $\dfrac{a_0+b_0}{2}$.

Suites $u_{n+1}=f(u_n)$

Exercice 23

1. Vérifier que la formule $f(x)=\dfrac{-x+18}{3x+2}$ définit une fonction de l'intervalle $[\,0\,;9\,]$ dans lui-même.
2. Montrer que la suite u définie par $u_0=3$ et $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=f(u_n)$ est bien définie
3. Montrer que la suite v donnée par
$$\forall n\in\mathbb{N},\quad v_n=\frac{u_n-2}{u_n+3}$$
est bien définie.
4. Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique et déterminer sa raison.
5. En exprimant u_n en fonction de v_n, donner une expression de u_n en fonction de n.
6. Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 24

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par $u_0=a\in\mathbb{R}_+^*$ et

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad u_{n+1}=\sqrt{u_n^2+u_n}$$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est elle majorée ?

Exercice 25

Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$u_1=1\qquad\text{et}\qquad\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad u_{n+1}=\sqrt{1+u_n}$$

Exercice 26

Étude de la suite définie par

$$u_0=1\qquad\text{et}\qquad\forall n\in\mathbb{N},\quad u_{n+1}=\frac{u_n}{u_n^2+1}$$

Exercice 27

Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

1. $u_0 = 1, \quad \forall n\in\mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1+u_n}$.
2. $u_1 = 1, \quad \forall n\in\mathbb{N}^*, \quad u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + \dfrac{1}{2^n}}$.
3. $u_0 \in\mathbb{R}, \quad \forall n\in\mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \dfrac{1}{n}\mathrm{e}^{-u_n}$. (Donner un équivalent de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque n tend vers $+\infty$)

Exercice 28

On fixe deux nombres réels a et b supérieurs ou égaux à 1. On étudie la suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = a, u_1 = b$ et

$$\forall n\in\mathbb{N}, \quad u_{n+2} = \sqrt{u_n} + \sqrt{u_{n+1}}$$

1. a) Montrer que pour tout entier naturel n, le nombre u_n est bien défini et vérifie $u_n \geqslant 1$.
   b) Montrer que la seule limite possible de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est 4.
2. On se propose d'établir la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par l'étude d'une suite auxiliaire, à savoir la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\forall n\in\mathbb{N}, \quad v_n = \dfrac{1}{2}\sqrt{u_n} - 1$.
   a) Montrer que si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 4$.
   b) Vérifier : $\forall n\in\mathbb{N}, \quad v_{n+2} = \dfrac{v_{n+1}+v_n}{2(2+v_{n+2})}$.
   c) En déduire
   $$\forall n\in\mathbb{N}, \quad |v_{n+2}| \leqslant \frac{1}{3}\left(|v_{n+1}| + |v_n|\right)$$
   d) On note $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $x_0 = |v_0|$, $x_1 = |v_1|$ et
   $$\forall n\in\mathbb{N}, \quad x_{n+2} = \frac{1}{3}x_{n+1} + \frac{1}{3}x_n$$
   Démontrer $\forall n\in\mathbb{N}, \quad |v_n| \leqslant x_n$.
   e) Conclure quant à la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Étude de suites

Exercice 29

On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bornée telle que la suite $(u_{n+1}-u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone.
Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

Exercice 30

Montrer que si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone, alors la suite de terme général $v_n = \dfrac{1}{n+1}(u_0+u_1+\cdots+u_n)$ est monotone et de même monotonie que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 31

Étude de la convergence de la suite de terme général $u_n = \lfloor a^n\rfloor^{1/n}$ avec $a\in\mathbb{R}_+^*$ fixé.

Exercice 32

Soit u la suite de terme général

$$u_n = \frac{1\times 3\times\cdots\times(2n+1)}{2\times 4\times\cdots\times(2n+2)} = \frac{\prod\limits_{k=0}^{n}(2k+1)}{\prod\limits_{k=0}^{n}(2k)}$$

1. Étudier la monotonie de u et en déduire que u est convergente.
2. Soit v la suite de terme général $v_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+2}}$. Montrer que $\quad \forall n\in\mathbb{N}, \quad 0 < \dfrac{u_{n+1}}{u_n} < \dfrac{v_{n+1}}{v_n}$.
3. En déduire que $\forall n\in\mathbb{N}, \quad u_n < v_n$. Quel est la limite u ?

Exercice 33

On pose

$$\forall n\in\mathbb{N}^*, \quad u_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{(n+k)(n+k+1)}}$$

Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est monotone, convergente et que sa limite ℓ est dans $[\,1/2\,;\,1\,]$.

Exercice 34

On pose $u_0 = -1$ et

$$\forall n\in\mathbb{N}^*, \quad u_n = \frac{1}{2}\left(u_n + \sqrt{u_n^2 + 2^{-n}}\right)$$

1. Étudier la monotonie de u.
2. Démontrer que
   $$\forall n\in\mathbb{N}^*, \quad u_{n+1} - u_n \leqslant \frac{1}{2}\left(\sqrt{2}\right)^{-n}$$
3. En déduire que u converge.