Variables aléatoires

BCPST 1 — 2022/2023

Loi d'une v.a.r.

Exercice 1

La loi de probabilité d'une variable aléatoire X est donnée par le tableau suivant :

x_i	-4	-2	1	2	3
$P(X = x_i)$	0,10	0,35	0,15	0,25	0,15

1. Tracer le diagramme en bâtons de X.
2. Donner sa fonction de répartition et en tracer le graphe.
3. Calculez $P(X < 0)$, $P(X > -1)$, $P(-3{,}5 < X \leqslant -2)$, $P(-3{,}5 < X < -2)$.
4. Donner, sous forme d'un tableau, la loi de probabilité des variables aléatoires suivantes : $|X|$, $X^2 + X - 2$, $\inf(X, 1)$, $\sup(X, -X^2)$.

Exercice 2

Soit $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < -2 \\ 1/3 & \text{si} \quad -2 \leqslant x < 1 \\ 2/5 & \text{si} \quad 1 \leqslant x < 2 \\ 1 & \text{si} \quad 2 \leqslant x. \end{cases}$$

1. Tracer la courbe représentative de F.
2. Soit X une variable aléatoire ayant F pour fonction de répartition. Calculer $P(X \leqslant 0)$.
3. Calculer $P(X = 1)$ et $P(X = -1)$.
4. Soient Y et Z les variables aléatoires définies par $Y = X/2$ et $Z = X + 2$. Déterminer les fonctions de répartition de Y et de Z et tracer leurs courbes représentatives sur le même graphique que F.

Exercice 3

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\lambda \in \mathbb{R}_+$. On considère une v.a.r. X prenant ses valeurs dans l'ensemble $\llbracket 1 ; n \rrbracket$ et dont la loi est de la forme :

$$\forall k \in \{1, 2, \dots, n\}, \quad P(X = k) = \lambda k.$$

1. Déterminer λ.
2. Calculer $E(X)$ et $V(X)$.

Exercice 4

Soit X une v.a.r. finie prenant ses valeurs dans $\llbracket 0 ; n \rrbracket$ et telle que $\forall k \in \{0, .. n\} \quad P(X = k) = ak + b$ avec a et b deux paramètres réels. Est-il possible que X soit une variable réduite ?

Exercice 5

Une machine à sous fonctionne de la manière suivante : on introduit une pièce de 1 € et 3 roues tournent ; ces roues présentent les dix chiffres 0 à 9 et chaque roue s'arrête en montrant un chiffre au hasard.

Si les trois chiffres sont différents, le joueur perd sa mise. S'il y a un « double » le joueur touche 2 € et s'il y a un « triple » le joueur touche y € (y est un entier).

Pour quelles valeurs de y le jeu est-il favorable au tenancier ?

Exercice 6 — *Un problème posé par Daniel Bernoulli*

Parmi les $2n$ personnes formant n couples, m personnes décèdent. En moyenne combien de couples ont survécu ?

Exercices d'application

Exercice 7

On extrait au hasard 6 lapins de leur cage. Chaque animal possède, indépendamment des autres, la probabilité 0,5 d'être un mâle. Soit C la variable aléatoire égale au nombre de couples mâle–femelle formés simultanément avec les 6 animaux. Donner la loi de C et calculer $E(C)$.

Exercice 8

1. Trois filles invitent trois garçons à une soirée. Chacune choisit indépendamment des autres un garçon et lui envoie un SMS. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de garçons invités. Donner la loi de X et calculer son espérance.

   Soit Y la variable aléatoire égale au nombre de garçons invités plusieurs fois. Donner la loi de Y et calculer son espérance.
2. En fait les filles peuvent inviter une fille ou un garçon (autre qu'elle-même). Reprendre la question précédente.

Exercice 9

N urnes comportent chacune des jetons numérotés de 1 à n. On tire au hasard un numéro dans chaque urne, et on appelle X le plus grand des numéros tirés.

1. Déterminer la fonction de répartition F_X de X.
2. Trouver la loi de X.
3. Calculer $E(X)$. Quelle est la limite de $E(X)/n$ quand n tend vers $+\infty$? En déduire un équivalent de $E(X)$ lorsque n tend vers $+\infty$.
4. Quelle est la limite de $E(X)$ lorsque N tend vers $+\infty$? Commenter.

Exercice 10

On considère une urne de taille $N > 1$, contenant r boules blanches et $N-r$ boules noires ($0 < r < N$). Dans cette urne, on prélève les boules une à une et sans remise, jusqu'à l'obtention de toutes les boules blanches, et on note X le nombre de tirages qu'il est nécessaire d'effectuer pour cela.

1. a) Traiter le cas $N = 4$ et $r = 1$.
   b) Traiter le cas $N = 4$ et $r = 2$.
   c) Dans le cas $r = 1$, reconnaître la loi de X. Donner son espérance. Même question dans le cas $r = N$.
   On revient désormais au cas général : $1 < r < N$.
2. Déterminer l'ensemble des valeurs prises par X.
3. Soit k l'une de ces valeurs.
   a) Déterminer la probabilité qu'au cours des $k-1$ premiers tirages soient apparus $r-1$ boules blanches.
   b) Vérifier que : $P(X = k) = \dfrac{\binom{k-1}{r-1}}{\binom{N}{r}}$.
4. En déduire les valeurs des sommes : $\displaystyle\sum_{k=r}^{n}\binom{k-1}{r-1}$ puis $\displaystyle\sum_{k=r}^{N}\binom{k}{r}$ et $\displaystyle\sum_{k=r}^{N}\binom{k+1}{r+1}$.
5. Montrer que : $E(X) = \dfrac{r(N+1)}{r+1}$.
6. Calculer $E(X(X+1))$ et en déduire $V(X)$.

Exercice 11

On considère une assemblée de n personnes. Une urne contient toutes les listes non ordonnées, de tailles quelconques, écrites avec les noms de ces n personnes. Combien y-a-t'il de listes dans l'urne ?
On tire au hasard un papier et on appelle X la v.a.r. égale au nombre de personnes figurant sur la liste. Déterminer la loi de X, son espérance et sa variance.

Exercice 12

Un sac contient 10 jetons dont 4 rouges et 6 blancs. On extrait les 10 jetons un à un, sans remise. Soit X la v.a.r. « rang du premier jeton rouge tiré ».
Trouver la loi de X, puis calculer $E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$. On pourra introduire les évènements A_j : « le j-ième tirage amène un jeton blanc ».

Exercice 13

On considère 4 lettres et 4 enveloppes correspondantes. On met au hasard les 4 lettres dans les enveloppes et on définit une variable aléatoire X égale au nombre de lettres qui atteindront leur destinataire. Calculer $E(X)$.

Exercice 14

Joshua organise une loterie. Il vend 50 billet à 1 € chacun, puis il choisit au hasard (de manière équiprobable) un billet. Le détenteur du billet en question gagne alors une bicyclette achetée en solde pour 35 €. Luc achète un billet et Matthieu en achète deux.

1. Calculer la probabilité que Luc gagne ; que Mathieu gagne.
2. On note L le gain de Luc et M celui de Mathieu. Calculer l'espérance et la variance de L, ainsi que l'espérance de M.

Exercice 15

Une urne contient deux boules marquées 1, deux marquées 2 et une marquée 3. On prélève simultanément deux boules au hasard et on appelle X la somme des numéros marqués sur les deux boules. Déterminer la loi de X son espérance et son écart-type.

Exercice 16

On lance un dé idéal au plus cinq fois, en s'arrêtant dès que l'on a obtenu un 6. On note Y le nombre de lancer effectués. Déterminer la loi de Y.

Utilisation des lois usuelles

Exercice 17

1. Si X suit une loi uniforme sur $[\![1 ; 20]\!]$.
   a) Quelle est la loi de $\max(X, 10) - 1$?
   b) Quelle est la loi de $21 - X$?
2. Si X suit une loi binomiale de paramètres 10 et $1/4$:
   a) Quelle est la loi de $\min(X, 1)$?
   b) Quelle est la loi de $10 - X$?

Exercice 18

Pour chacune des variables aléatoires qui sont décrites ci-dessous, indiquez quelle est sa loi exacte (avec les paramètres si l'énoncé permet de les déterminer) :

1. nombre de filles dans les familles de 6 enfants, sachant que la probabilité de naissance d'une fille est $0,48$;
2. nombre annuel d'accidents à un carrefour donné, sachant qu'il y a chaque jour une chance sur 125 d'accident ;
3. dans une délégation de 20 personnes comptant 5 femmes, nombre de femmes présentes dans une délégation de 6 personnes tirées au sort ;
4. nombre de voix d'un des candidats à une élection présidentielle lors du dépouillement des 100 premiers bulletins dans un bureau de vote ;
5. il y a 128 boules numérotées de 1 à 128. On en tire 10 parmi les 128, puis on en tire une parmi les 10. On note X le numéro de la boule obtenue. Loi de X ?
6. nombre de fois qu'il faut lancer un dé pour obtenir un six.

Exercice 19

Dans chacune des expériences qui suivent, reconnaître la loi de X.

1. Un sac contient 26 jetons sur lesquels figurent les 26 lettres de l'alphabet. On en aligne 5 au hasard que l'on aligne afin de former un mot de 5 lettres. X : nombre de voyelles dans ce mot.
2. On range au hasard 20 objets dans 3 tiroirs. X : nombre d'objets dans le premier tiroir.
3. Une urne contient 6 boules vertes, 3 boules rouges et 5 boules bleues. On tire successivement et sans remise 10 boules de l'urne. X : nombre de boules vertes tirées.
4. On prend un jeu de 32 cartes mélangées. On retourne une par une les cartes jusqu'à l'apparition de l'as de coeur. X : nombre de cartes que l'on a retournées.
5. On suppose que 1% des trèfles possèdent 4 feuilles. On cueille 100 trèfles. $X =$ nombre de trèfles à 4 feuilles cueillis.

Exercice 20

Une urne contient $n-1$ boules blanches et une boule noire ($n > 1$). On tire successivement et sans remise toutes les boules. On désigne par X le rang du tirage de la boule noire. Déterminer la loi de X, son espérance et sa variance.

Exercice 21

On considère une urne contenant 8 billes vertes et 8 billes bleues, dont on extrait un paquet de 8 billes. Soit N la variable aléatoire égale au nombre de billes vertes dans le groupe.

Calculer, à la calculatrice, $P(3 \leqslant N \leqslant 5)$ et comparer avec la probabilité de l'évènement similaire pour une loi binomiale de paramètres 8 et $1/2$.

Exercice 22

Auguste (A) et Barbara (B) jouent à un petit jeu dont la règle est la suivante : A lance deux pièces et B trois ; si A obtient plus de piles que B, il gagne 10 €, s'il en obtient autant il gagne 1 € et s'il en obtient moins il perd 5 €. Préférerez-vous être Auguste ou Barbara ?

Exercice 23

On dispose d'une urne contenant 10 boules blanches et 10 boules noires. On tire 5 boules simultanément dans cette urne.

1. Calculer (à la calculatrice) la probabilité de tirer plus de boules blanches que de boules noires.
2. Reprendre la question précédente en supposant que les tirages se font successivement et avec remise.

Exercice 24

Cette feuille d'exercice contient k erreurs typographiques. Lors de la relecture une erreur à la probabilité $p = 0{,}75$ d'être détectée par un lecteur attentif (et il y a indépendance entre la détection des différentes erreurs).

1. Calculer le nombre moyen d'erreurs non détectées.
2. Calculer ensuite cette espérance si le texte est soumis à 37 relectures (attentives !) indépendantes.

Exercice 25

Une urne contient 5 boules rouges, 5 boules blanches et 6 boules bleues. On tire 4 boules successivement, sans remise.

1. On désigne par X la v.a.r. égale au nombre de boules rouges obtenues. Déterminer la loi de X, puis calculer $E(X)$ et $V(X)$.
2. On tire 4 boules successivement, avec remise. On désigne par Y la v.a.r. égale au nombre de boules rouges obtenues. Reprendre la question précédente avec Y.
3. a) Comparer $E(X)$ et $E(Y)$; commenter.
   b) Comparer $\sigma(X)$ et $\sigma(Y)$ et commenter.

Exercice 26

On suppose qu'une variable aléatoire X a une espérance de 24 et une variance de 18. Calculer les paramètres de la loi de X sachant que X suit une loi binomiale.

Exercice 27

On tire 6 cartes avec remise dans un jeu de 32 cartes. On note Y le nombre de rois tirés.

1. Déterminer la loi de Y, son espérance et sa variance.
2. Même question avec un tirage sans remise.

Exercice 28

Un examen comporte 15 questions chacune admettant 3 réponses possibles. Les étudiants répondent à chaque question indépendamment. On suppose que 70 % des étudiants ont préparés l'examen et répondent à une question correctement avec une probabilité de 0,8, les 30 % restants répondent aux questions au hasard. Il faut au moins 8 bonnes réponses pour réussir l'examen.

1. Si un étudiant échoue, quelle est la probabilité pour qu'il ait préparé l'examen ?
2. Soit M le nombre moyen de bonnes réponses pour un étudiant ayant préparé l'examen. Si un étudiant obtient cette note M quelle est la probabilité pour qu'il n'ait pas préparé l'examen ?

Exercice 29

Un amoureux de l'ancien adopte la résolution suivante : le jour de l'an il écrit à son amoureu(se) à coup sûr. Le jour suivant, s'il a écrit une lettre la veille, il en écrit le jour-même avec la probabilité $1/3$. Sinon, il écrit une lettre à coup sûr.

Soit X_i la v.a.r. de Bernoulli valant 1 si le jeune homme écrit le jour i et 0 sinon.

1. Former une relation de récurrence entre $P(X_{i+1}=1)$ et $P(X_i=1)$.
2. En déduire la loi de X_i pour $1 \leqslant i \leqslant 365$.
3. Soit X la v.a.r. égale au nombre lettre envoyées dans l'année. Calculer $E(X)$.

Problèmes

Exercice 30

Une urne contient $n > 1$ boules dont $r > 1$ sont rouges et les autres sont blanches. On tire successivement et sans remise toutes les boules. Soit $x \in [\![1 \,;\, r]\!]$. On appelle X le rang d'apparition de la x–ième boule rouge. Trouver la loi de X.

★ **Exercice 31**

Un sac contient n jetons numérotés de 1 à n ($n > 3$). On extrait 3 jetons simultanément, on note X, Y et Z les trois numéros obtenus avec $X < Y < Z$.

1. Déterminer la loi de Y.
2. Calculer son espérance.

Exercice 32

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et X une variable aléatoire à valeurs dans $[\![0 \,;\, n]\!]$ et F_X sa fonction de répartition. Montrer que :

$$E(X) = \sum_{k=0}^{n-1} P(X > k) = \sum_{k=0}^{n-1} (1 - F_X(k))$$

Exercice 33

On considère n urnes numérotées de 1 à n. La première urne contient des boules blanches et des boules noires ; la proportion des boules blanches est p_1. Les urnes suivantes contiennent chacune a boules blanches et a boules noires.

On effectue n tirages de la manière suivante : on tire une boule de la première urne que l'on place dans la deuxième urne, puis on tire une boule de la deuxième urne que l'on place dans la troisième urne, et ainsi de suite jusqu'au tirage dans la dernière urne.

Pour $1 \leqslant k \leqslant n$, on désigne par X_k la variable aléatoire égale à 1 si la boule tirée de la k–ème urne est blanche et égale à 0 sinon.

1. Déterminer les lois de probabilité de X_1 et de X_2, puis leur espérance mathématique et leur variance en fonction de p_1 et de a.
2. Démontrer qu'il existe une valeur de p_1 pour laquelle X_1 et X_2 suivent la même loi de probabilité.
3. Pour $1 \leqslant k \leqslant n$, on pose : $p_k = P(X_k = 1)$ et $q_k = P(X_k = 0)$.
   a) Démontrer qu'il existe une matrice M dépendant de a telle que pour tout $k \in [\![0 \,;\, n-1]\!]$, on ait : $\begin{pmatrix} p_{k+1} \\ q_{k+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} p_k \\ q_k \end{pmatrix}$.

B) Calculer M^n pour tout n de $\mathbb{N}$.

C) En déduire la loi de probabilité de X_n et déterminer $\lim_{n\to+\infty} p_n$ et $\lim_{n\to+\infty} q_n$.

Exercice 34

Dans un plan euclidien rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère pour $n \in \mathbb{N}^*$, l'ensemble E_n des points du plan de coordonnées $\left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n}\right)$ avec $(i, j) \in \mathbb{N}^2$ tel que $0 \leqslant i \leqslant n$ et $0 \leqslant j \leqslant n$.

1. Déterminer le nombre d'éléments de E_n, puis le nombre de paires (c'est à dire de sous-ensembles à deux éléments) de E_n.
2. Déterminer le nombre de carrés non réduits à un point dont les sommets sont des points de E_n et dont les côtés sont parallèles aux axes.
3. Calculer la valeur moyenne de leur périmètre et sa valeur lorsque n tend vers $+\infty$.

Deux variables aléatoires

Exercice 35

On considère X et Y deux v.a.r. de Bernoulli sur un espace probabilisé fini (Ω, P).

1. Montrer que
$$E(XY) = P\big((X = 1) \cap (Y = 1)\big)$$
2. Montrer que X et Y sont indépendantes ssi leur covariance est nulle.

Exercice 36 — *Téléphone arabe*

Une personne A transmet une information binaire à I_1, par convention valant 1.

I_1 la transmet cette information à I_2 qui la transmet à I_3, etc. jusqu'à I_n. On fait l'hypothèse que chaque intermédiaire I_k $(1 \leqslant k \leqslant n)$ transmet l'information qu'il reçoit avec une probabilité p $(0 < p < 1)$ et l'information contraire avec la probabilité $1 - p$.

1. On appelle X_k la variable aléatoire égale à l'information reçu par I_k. Exprimer la loi de X_{k+1} en fonction de celle de X_k.
2. Calculer en fonction de n et p la probabilité pour que I_n reçoive l'information initiale. (Application : $p = 0,9$ et $n = 10$.)
3. Calculer la limite de p_n lorsque n tend vers $+\infty$. Commentez.

Exercice 37

Soient X et Y deux v.a.r. discrètes admettant des variances $V(X)$ et $V(Y)$. On pose $Z = X + Y$ et $T = X - Y$.

1. Montrer que si Z et T sont indépendantes alors $V(X) = V(Y)$.
2. Soient X et Y deux v.a.r. indépendantes de même lois prenant les valeurs 1, 2, 3 avec la probabilité $\frac{1}{3}$.
   A) Montrer que $V(X) = V(Y)$.
   B) Déterminer les lois de Z et de T. Sont-elles indépendantes ?

Exercice 38

Soit X et Y deux v.a.r. indépendantes suivant toutes les deux une loi $\mathscr{B}(3, 1/2)$. Soit $Z = X - Y$. Déterminer la loi de Z. Z et X sont-elles indépendantes ?

Exercice 39

On choisit au hasard deux nombres entiers compris (au sens large) entre -2 et 2, les paires de nombres étant équiprobables.

1. Donner l'espace probabilisé adapté à cette expérience.
2. Calculer la probabilité d'avoir choisi le nombre 0.
3. On note X le produit des deux nombres choisis. Déterminer la loi et l'espérance de X. Représenter graphiquement la fonction de répartition de X.

Exercice 40 — *Modèle d'urne d'Ehrenfest*

On répartit $2M$ boules numérotées de 1 à $2M$ dans deux urnes U et V. Cette répartition se fait de manière non précisée.

On effectue une succession de tirages d'un numéro, de façon uniforme, dans $[\![1 \,;\, 2M]\!]$. À chaque tirage, on change d'urne la boule portant précisément le numéro sorti par le dé. On note X_n le nombre de boules dans l'urne U au bout de n tirages.

1. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $k \in X_{n+1}(\Omega)$, exprimer $P(X_{n+1} = k)$ en fonction de $P(X_n = k - 1)$ et $P(X_n = k + 1)$.
2. En multipliant la relation précédente par k et en la sommant, exprimer $E(X_{n+1})$ en fonction de $E(X_n)$.
3. En déduire $\lim_{n\to+\infty} E(X_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Commentaire ?