Variables aléatoires

BCPST 1 — 2022/2023

NOTATIONS DU CHAPITRE

$(\Omega, \mathscr{T}, P)$ est un espace probabilisé fini.

I — VARIABLE ALÉATOIRE

DÉFINITION I.1 — Variable aléatoire réelle
*On appelle **variable aléatoire réelle** (en abrégé v.a.r.) toute application de Ω dans $\mathbb{R}$.*

Pour tout intervalle I de $\mathbb{R}$, l'évènement $X^{-1}\langle I\rangle$ est noté $(X \in I)$ (ou $[X \in I]$). C'est l'ensemble des évènements élémentaires pours lesquelles X prend une valeur dans I, ou, plus simplement, l'évènement « X est dans l'intervalle I ».
On note couramment $(X = x)$ l'évènement $X^{-1}\langle\{x\}\rangle$: c'est l'ensemble des évènements élémentaires pours lesquelles X vaut x, ou tout simplement l'évènement « X est égal à x ».
On note de même $(X \geqslant 2)$, $(1 < X \leqslant 2)$, etc.
Dans le cadre de ce cours, Ω peut s'écrire $\{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_r\}$. L'ensemble des valeurs de X s'écrit donc $X(\Omega) = \{X(\omega_1), X(\omega_2), \ldots, X(\omega_r)\} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ (avec $n \leqslant r$).

DÉFINITION I.2 — Support d'une variable aléatoire
*Le **support** d'une variable aléatoire X est l'ensemble $X(\Omega)$ des valeurs atteintes par X.*
*La variable aléatoire X est **discrète** si $X(\Omega)$ est dénombrable.*
*La variable aléatoire X est **discrète finie** si $X(\Omega)$ est fini.*
*La variable aléatoire X est **continue** si $X(\Omega)$ est indénombrable.*

Dans le cadre de ce cours, les variable aléatoire sont discrètes finies.
La détermination exacte de $X(\Omega)$ n'est pas toujours utile, et peut même s'avérer fastidieuse. C'est pourquoi il est courant d'inclure dans $X(\Omega)$ des valeurs x tels que $P(X = x) = 0$.

PROPRIÉTÉ I.3 — Système complet d'évènements associé
Soit $(\Omega, \mathscr{T})$ un espace probabilisable et X un v.a.r. finie de support $X(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_n\}$.
*Alors $(X = x_1)$, $(X = x_2)$, …, $(X = x_n)$ est un s.c.e. : c'est le **système complet d'évènements associé à la variable aléatoire X***

PROPRIÉTÉ I.4 — Fonction d'une variable aléatoire
Soit X une variable aléatoire sur Ω et g une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$
Alors $g \circ X$ est une variable aléatoire, noté $g(X)$.

II — Loi de probabilité

Définition 2.1 — Loi de probabilité d'une variable aléatoire

*On appelle **loi de probabilité** d'une variable aléatoire X discrète finie prenant ses valeurs dans un ensemble $X(\Omega)$ la donnée de la fonction*

$$f_X : \left| \begin{array}{rcl} X(\Omega) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & P(X = x) \end{array} \right.$$

Théorème 2.2 — Définition de la loi d'une variable aléatoire

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $p_1, \ldots, p_n$ n réels positifs tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.
Alors il existe une variable aléatoire X sur un univers fini telle que

$$\forall i \in [\![1 \,;\, n]\!], \qquad P(X = x_i) = p_i$$

Définition 2.3 — Fonction de répartition d'une variable aléatoire

*Soit X une variable aléatoire. La **fonction de répartition** de X est la fonction F_X définie par*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad F_X(x) \overset{\text{déf.}}{=} P(X \leqslant x)$$

Propriété 2.4 — Propriété de la fonction de répartition

La fonction de répartition d'une variable aléatoire est une fonction croissante, de limites 0 en $-\infty$ et 1 en $+\infty$.

Dans le cas d'une variable aléatoire discrète finie, la fonction de répartition est une fonction en escalier.

III — Indépendance de variables aléatoires

Définition 3.1 — Couple de variables aléatoires indépendantes

*Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur un même univers Ω. Les deux variables aléatoires X et Y sont **indépendantes** si et seulement si*

$$\forall (x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega), \qquad P\big((X = x) \cap (Y = y)\big) = P(X = x) \times P(Y = y)$$

Propriété 3.2 — Fonctions de deux variables aléatoires indépendantes

Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur un même univers Ω et u et v deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
Si X et Y sont indépendantes alors les variables aléatoires $u(X)$ et $v(Y)$ sont indépendantes.

Définition 3.3 — Indépendance mutuelle de plusieurs variables aléatoires
Soit $X_1, X_2, \dots, X_n$ des variables aléatoires définies sur un même univers Ω. On dit que les n variables aléatoires $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont ***mutuellement indépendantes*** *si et seulement si*

$$\forall (x_1, x_2, \dots, x_n) \in X_1(\Omega) \times X_2(\Omega) \times \cdots \times X_n(\Omega),$$
$$P(X_1 = x_1 \cap X_2 = x_2 \cap \cdots \cap X_n = x_n) = P(X_1 = x_1) \times P(X_2 = x_2) \times \cdots \times P(X_n = x_n)$$

Propriété 3.4
Soit $X_1, X_2, \dots, X_n$ des variables aléatoires définies sur un même univers Ω.
Si $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont mutuellement indépendantes, alors toute sous-famille de $X_1, X_2, \dots, X_n$ l'est aussi.

Propriété 3.5
Soit $X_1, X_2, \dots, X_n$ des variables aléatoires définies sur un même univers Ω. Soit $p \in [\![1 ; n-1]\!]$ et deux fonctions $u : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}$ et $v : \mathbb{R}^{n-p} \longrightarrow \mathbb{R}$.
Si $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont mutuellement indépendantes, alors les variables aléatoires $u(X_1, X_2, \dots, X_p)$ et $v(X_{p+1}, \dots X_n)$ sont indépendantes.

IV — Espérance mathématique

Définition 4.1 — Espérance d'une variable aléatoire
Soit X une variable aléatoire dont l'ensemble des valeurs s'écrit $\{x_1, \dots, x_n\}$.
*L'****espérance mathématique de X*** *est le réel*

$$\mathrm{E}(X) \overset{\text{déf.}}{=} \sum_{x \in X(\Omega)} x\, P(X = x)$$

Propriété 4.2
Soit X une variable aléatoire. Si $m = \min\big(X(\Omega)\big)$ et $M = \max\big(X(\Omega)\big)$, alors $\mathrm{E}(X) \in [\, m \,;\, M \,]$.

Corollaire 4.3
En particulier, si X est une variable aléatoire positive alors $\mathrm{E}(X) \geqslant 0$.

Théorème 4.4 — Théorème de transfert
Soit X une variable aléatoire et g une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Alors

$$\mathrm{E}\big(g(X)\big) = \sum_{x \in X(\Omega)} g(x)\, P(X = x)$$

PROPRIÉTÉ 4.5 — **Linéarité de l'espérance – I**

Soit X une variable aléatoire et $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. On a $\mathrm{E}(aX+b) = a\,\mathrm{E}(X) + b$.

Vocabulaire La variable aléatoire X est une **variable centrée** si et seulement si $\mathrm{E}(X) = 0$
Si X est une variable aléatoire quelconque, on appelle **variable centrée associée à X** la variable aléatoire $X^o = X - \mathrm{E}(X)$.

THÉORÈME 4.6 — **Formule de transfert - cas de deux variables**

Soit (X,Y) un vecteur aléatoire, g une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ et $Z = g(X,Y)$.

$$E(Z) = \sum_{x\in X(\Omega)} \sum_{y\in Y(\Omega)} P\big((X=x)\cap(Y=y)\big)$$

PROPRIÉTÉ 4.7 — **Linéarité de l'espérance – II**

Soit X et Y deux variable aléatoire alors $\mathrm{E}(X+Y) = \mathrm{E}(X) + \mathrm{E}(Y)$.

PROPRIÉTÉ 4.8 — **Croissance de l'espérance**

Soit X et Y deux variable aléatoire telles que l'évènement $X \geqslant Y$ est certain. Alors $\mathrm{E}(X) \geqslant \mathrm{E}(Y)$.

DÉFINITION 4.9 — **Variance d'une v.a.r.**

*Soit X une variable aléatoire. La **variance** de X est définie par*

$$\mathrm{V}(X) \overset{\text{déf.}}{=} \mathrm{E}\big((X - \mathrm{E}(X))^2\big)$$

*L'**écart-type** de X le réel $\sigma(X) = \sqrt{\mathrm{V}(X)}$.*

PROPRIÉTÉ 4.10 — **Cas de la variance nulle**

Soit X une variable aléatoire.
On a $\mathrm{V}(X) = 0$ si et seulement si X est une v.a.r. certaine, égale dans ce cas à $\mathrm{E}(X)$.

THÉORÈME 4.11 — **Théorème de König-Huygens**

Soit X une variable aléatoire. On a $\mathrm{V}(X) = \mathrm{E}(X^2) - \mathrm{E}(X)^2$.

PROPRIÉTÉ 4.12

Soit X une variable aléatoire et a et b deux réels.

- $\mathrm{V}(X+b) = \mathrm{V}(X)$ *et* $\sigma(X+b) = \sigma(X)$ *(invariance par translation);*
- $\mathrm{V}(aX) = a^2\,\mathrm{V}(X)$ *et* $\sigma(aX) = |a|\,\sigma(X)$*;*

Vocabulaire La variable aléatoire X est une **variable réduite** si et seulement si $\mathrm{V}(X) = 1$.

Si X est une variable aléatoire de variance non nulle. On appelle **variable centrée réduite associée à X** la variable aléatoire $X^* = \dfrac{X - \mathrm{E}(X)}{\sigma(X)}$.

Propriété 4.13
Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes. On a

$$E(XY) = E(X) \times E(Y) \qquad \text{et} \qquad V(X+Y) = V(X) + V(Y)$$

La réciproque est fausse.

v — Lois usuelles

Définition 5.1 — **Loi uniforme**
Soit n un entier naturel non nul.
*Une variable aléatoire X suit **la loi uniforme** sur $[\![1 ; n]\!]$ si et seulement si*

1) $X(\Omega) = [\![1 ; n]\!]$;
2) $\forall k \in [\![1 ; n]\!], \qquad P(X = k) = \dfrac{1}{n}$

On note alors $\boldsymbol{X \hookrightarrow \mathscr{U}\left([\![1 ; n]\!]\right)}$.

Situation type On tire un nombre au hasard entre 1 et n sans favoriser un résultat par rapport à un autre. La variable aléatoire X est alors le résultat obtenu.
Espérance, variance $\mathrm{E}(X) = \dfrac{n+1}{2}$ et $V(X) = \dfrac{n^2-1}{12}$

Définition 5.2 — **Loi de Bernoulli**
*Soit $p \in]0 ; 1[$. Une variable aléatoire X suit la **loi de Bernoulli de paramètre p** si et seulement si*
1. $X(\Omega) = \{0, 1\}$;
2. $P(X = 1) = p$ *et donc* $P(X = 0) = 1 - p = q$.

*On note alors $\boldsymbol{X \hookrightarrow \mathscr{B}(1, p)}$. La variable aléatoire X est qualifiée de **variable aléatoire de Bernoulli**.*

Situation type Toute expérience a deux issues : on attribue arbitrairement la valeur 1 à un « succès » et la valeur 0 à un « échec ». Par exemple le lancer d'une pièce de monnaie (1 = obtention d'un pile), naissance d'un enfant (1 = naissance d'une fille), etc.
Espérance, variance $\mathrm{E}(X) = p$ et $V(X) = pq$
Notez que pour $p = 1$ (ou $p = 0$) la variable X est certaine, égale à 1 (ou à 0).

Définition 5.3 — **Variable indicatrice**
Soit A un évènement d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{T}, P)$. On associe à A la variable $\mathbb{1}_A$ définie par

$$\forall \omega \in \Omega, \qquad \mathbb{1}_A(\omega) = 1 \quad \text{si} \quad \omega \in A \qquad \text{et} \qquad \mathbb{1}_A(\omega) = 0 \quad \text{sinon}$$

*La variable aléatoire $\mathbb{1}_A$ est la **variable indicatrice** de l'évènement A.*

PROPOSITION 5.4

Si A et B étant deux évènement d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{T}, P)$. *On a*

$$\mathbb{1}_{\overline{A}} = 1 - \mathbb{1}_A \qquad \mathbb{1}_{A\cap B} = \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B \qquad \mathbb{1}_{A\cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A\mathbb{1}_B$$

PROPRIÉTÉ 5.5

Soit A un évènement d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{T}, P)$ *On a*

$$\mathrm{E}(\mathbb{1}_A) = P(\mathbb{1}_A = 1) = P(A)$$

DÉFINITION 5.6 — **Loi binomiale**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ *et* $p \in \,]0\,;1[$. *Une variable aléatoire X suit* ***la loi binomiale de paramètres n et p*** *si et seulement si*

1. $X(\Omega) = [\![\, 0\,; n\,]\!]$;
2. $\forall k \in [\![\, 0\,; n\,]\!], \qquad P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$.

On note alors $\boldsymbol{X \hookrightarrow \mathscr{B}(n, p)}$.

Situation type Une succession de n expériences de type succès-échec *indépendantes*. On suppose qu'à chaque expérience la probabilité de succès est *constante* égale à p.

La variable aléatoire X est le nombre de succès observés.

Espérance et variance $\mathrm{E}(X) = np$ et $V(X) = npq$